



५०  
७७७









No. IX.

*Under the patronage of the government of Bengal, and dedicated, by  
permission, to the Governor General of India.*

# ENCYCLOPÆDIA BENGALENSIS;

Or a series of publications in English and Bengali,

COMPILED FROM VARIOUS SOURCES,

ON HISTORY, SCIENCE, AND LITERATURE.

EDITED

BY THE REV K. M. BANERJEA.

---

"*দ্ব্যর্থক কার্পণ্য*"

*Diop. Sic. 1. 49.*

---

Mathematics,

---

GEOMETRY

PART II.

---

CALCUTTA:

WILLIAMS AND LEITCH, AND P. S. D'ROZARIO AND CO.

---

1883

R. Rodríguez, Printer,  
Sumashar Chandricka Press.

# ELEMENTS OF GEOMETRY,

THE FOURTH, FIFTH, AND SIXTH BOOKS

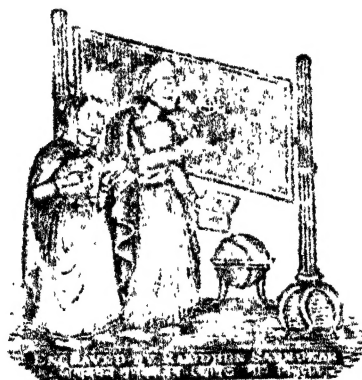
OF EUCLID,

BY JOHN PLAYFAIR, F. R. S.

WITH ADDITIONS

BY WILLIAM WALLACE, A. M. F. R. & M.

AND A SYNOPTICAL DEMONSTRATION AS BEFORE



TO WHICH IS ADDED A SELECTION FROM BLAND'S  
GEOMETRICAL PROBLEMS, AND THE LILAVATI.

Calcutta:

OSWELL AND LEPAGE AND P. S. D'ROZARIO AND CO.

1848.



# বিদ্যাকল্পদ্রুম ।

অর্থাৎ বিবিধ বিজ্ঞান বিষয়ক বচন ।

শ্রীকৃষ্ণকাম চন্দ্র বন্দ্যোপাধ্যায় দ্বারা ।

সংগৃহীত

নবম কাণ্ড ।

সংস্কৃত ।

১৯৩৮

ইউজিডেটর চতুর্থ পদকম যষ্ঠ অধ্যায় জ্ঞান  
পুস্তকেরোদয় বীথানুসারে ও উলিয়াম  
ওয়ালেসের মতিবিত্ত লিপ্যানু  
সারে অনুবাদিত ।

সম্প্রদেয়ে বাঙালী নামক গ্রন্থকারের ক্ষেত্র তত্ত্ব বিষয়ক  
প্রশ্ন হইতে এবং জালালাবাদের অন্তর্গত ক্ষেত্র  
ব্যবহার হইতে কতিপয় প্রশ্ন উদ্ধৃত ।

কলিকাতা সমাচার চিত্রিকা মন্ত্রে শ্রীযুত আর রব্রিগ্‌স  
সাহেব কর্তৃক মুদ্রিত হইল ।

ইং ১৮৪৮ । শক ১৭৬৯

## CONTENTS.

EUCLID	Book IV. ....	page 1
"	Book V. ....	28
"	Book VI. ....	59
"	GEOMETRICAL PROBLEMS FROM BLAND. ....	127
"	QUESTIONS FROM THE LILAVATI . . . .	138
"	GLOSSARY OF TERMS &c. ....	150

# GEOMETRY.

## PART II.



# ELEMENTS OF GEOMETRY

## BOOK IV.

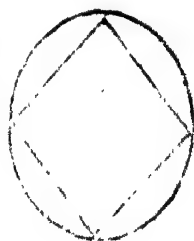
### DEFINITIONS.

I. A RECTILINEAL figure is said to be inscribed in another rectilinear figure, when all the angles of the inscribed figure are upon the sides of the figure in which it is inscribed, each upon each.

II. In like manner, a figure is said to be described about another figure, when all the sides of the circumscribed figure pass through the angular points of the figure about which it is described, each through each.



III. A rectilinear figure is said to be inscribed in a circle, when all the angles of the inscribed figure are upon the circumference of the circle.



## ক্ষেত্র ভেদ ।



২ অধ্যায় ।

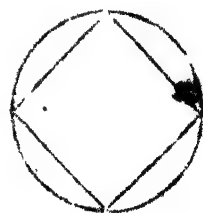
সংজ্ঞা ।

১। কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র অন্য সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত বলিয়া বর্ণিত হইলে তাহার ভাংপৰ্য্য এই যে যাহার মধ্যে ঐ অন্তর্গত ক্ষেত্র অঙ্কিত হয় তাহার প্রত্যেক পাশে অন্তর্গত ক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণ সংলগ্ন হইবে।



২। কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র অন্য ক্ষেত্রের উপরি অঙ্কিত বলিয়া বর্ণিত হইলে তাহার ভাংপৰ্য্য এই যে যাহার উপর অঙ্কিত হয় তাহার কোণের সহিত ঐ উপরি অঙ্কিত ক্ষেত্রের সমুদায় পাশে একে সংলগ্ন হইবেক।

৩। কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র বৃত্তের অন্তর্গত বলিয়া বর্ণিত হইলে তাহার ভাংপৰ্য্য এই যে অন্তর্গত ক্ষেত্রের সমুদায় কোণ বৃত্তের পরিধিতে সংলগ্ন হইবেক।



IV. A rectilineal figure is said to be described about a circle, when each side of the circumscribed figure touches the circumference of the circle.

V. In like manner, a circle is said to be inscribed in a rectilineal figure, when the circumference of the circle touches each side of the figure.

VI. A circle is said to be described about a rectilineal figure, when the circumference of the circle passes through all the angular points of the figure about which it is described.

VII. A straight line is said to be placed in a circle, when the extremities of it are in the circumference of the circle.



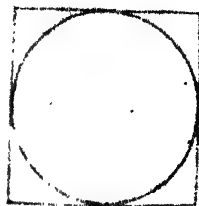
### PROP. I. PROB.

*In a given circle to place a straight line, equal to a given straight line, not greater than the diameter of the circle.*

Let ABC be the given circle, and D the given straight line, not greater than the diameter of the circle.

Draw BC the diameter of the circle ABC; then, if BC be equal to D, the thing required is done: for in the circle ABC a straight line BC is placed equal to D: But, if BC be not equal (S. 1.) to D, it must be greater; cut off from it CE equal to D, and from the centre C, at the distance CE describe the circle AEF, and join CA: Therefore,

৪ কোন সরল ট্রৈবিক ক্ষেত্র  
বৃত্তের উপর অঙ্কিত বলিয়া নির্দিষ্ট-  
কেন্দ্রের আধারখ্যা এই যে উপর  
অঙ্কিত বৃত্তের প্রত্যেক পার্শ্ব বৃত্তের  
পারি স্পর্শক হবে।



৫ কোন বৃত্ত সকল ট্রৈবিক ক্ষেত্রের  
অঙ্কিত বলিয়া নির্দিষ্টকেন্দ্রের উপর  
অঙ্কিত বৃত্তের আধারখ্যা এই যে উপর  
অঙ্কিত প্রত্যেক পার্শ্ব স্পর্শক হবে।



৬ কোন বৃত্ত সরল ট্রৈবিক  
ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত বলিয়া নির্দিষ্ট  
কেন্দ্রের উপর অঙ্কিত বৃত্তের আধারখ্যা

এই যে উপর অঙ্কিত বৃত্তের প্রত্যেক পার্শ্ব বৃত্তের  
পারি স্পর্শক হবে।

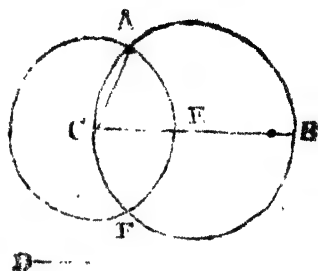
৭ কোন সরল বৈকট বৈকট বৃত্তের উপর অঙ্কিত  
বৃত্তের উপর অঙ্কিত বৃত্তের আধারখ্যা এই যে উপর  
অঙ্কিত বৃত্তের প্রত্যেক পার্শ্ব বৃত্তের  
পারি স্পর্শক হবে।

### ১ প্রতিজ্ঞা । সমস্যাদ্য ।

যদি বৃত্তের বৃহৎ অংশ এবং এর নির্দিষ্ট সরল রেখার  
পূর্বাংশ এবং সরল রেখা নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রের উপর  
অঙ্কিত হয়।

কখন নির্দিষ্ট বৃত্ত, তাহার বাহ্যিক বৃত্তের বৃহৎ অংশ  
নির্দিষ্ট সরল রেখা য। কখন বৃত্তের বাহ্যিক বৃত্তের  
খণ্ড যদি য সমান হয় তবে তাহার উপর ইচ্ছা নির্দিষ্ট  
কখন বৃত্তের য সমান খণ্ড রেখা অঙ্কিত হইল  
যদি য সমান না হয় তবে অবশ্য তাহা বৃত্তের বৃহৎ  
অংশের গণ্ড তাহা বৃত্তের য সমান করিয়া ছিন্ন কর।

because  $C$  is the centre of the circle  $AEF$ ,  $CA$  is equal to  $CE$ ; but  $D$  is equal to  $CE$ ; therefore  $D$  is equal to  $CA$ : Wherefore, in the circle  $ABC$ , a straight line is placed, equal to the given straight line  $D$ , which is not greater than the diameter of the circle.



Which was to be done.

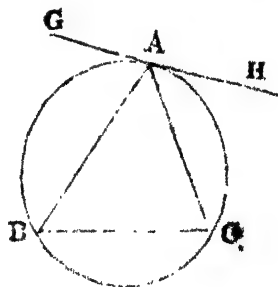
*Symbolical Demonstration.* Because  $C$  is the centre of  $\odot AEF$ ,  $AC = CE$ . But  $CE = D$  (by constr.)  $\therefore AC = D$ .

## PROP. II. PROB.

*In a given circle to inscribe a triangle equiangular to a given triangle.*

Let  $ABC$  be the given circle, and  $DEF$  the given triangle: it is required to inscribe in the circle  $ABC$  a triangle equiangular to the triangle  $DEF$ .

Draw (17. 3) the straight line  $GAH$ , touching the circle in the point  $A$ , and at the point  $A$ , in the straight line  $AH$ , make (23. 1.) the angle  $HAC$  equal to the angle  $DEF$ ; and at the point  $A$ , in the straight line  $AG$ , make the angle  $GAB$  equal to the angle  $DFE$ , and





join BC. Therefore, because HAG touches the circle ABC, and AC is drawn from the point of contact, the angle HAC is equal (32. 3.) to the angle ABC in the alternate segment of the circle. But HAC is equal to the angle DEF; therefore also the angle ABC is equal to DEF; for the same reason, the angle ACB is equal to the angle DFE; therefore the remaining angle BAC is equal (32. 1.) to the remaining angle EDF: Wherefore the triangle ABC is equiangular to the triangle DEF, and it is inscribed in the circle ABC. *Which was to be done.*

*Symb. Dem.* Because GH touches  $\odot$  in A,  $\angle ABC = \angle HAC$  (32.3)  $= \angle DEF$ . Similarly  $\angle ACB = \angle DFE$   $\therefore$  remaining  $\angle BAC =$  remaining  $\angle EDF$   $\therefore \triangle ABC$  is equiangular to  $\triangle DEF$ .

### PROP. III. PROB.

*About a given circle to describe a triangle equiangular to a given triangle.*

Let ABC be the given circle, and DEF the given triangle; it is required to describe a triangle about the circle ABC equiangular to the triangle DEF.

Produce EF both ways to the points G, H, and find the centre K of the circle ABC, and from it draw any straight line KB; at the point K in the straight line KB, make (23. 1.) the angle BKA equal to the angle DEG, and the angle BKC equal to the angle DFH; and through the points A, B, C, draw the straight lines LAM, MBN, NCL touching (17. 3.) the circle ABC: Therefore, because LM, MN, NL touch the circle ABC in the points A, B, C, to which from the centre are drawn KA, KB, KC, the angles at the points A, B, C, are right (18. 3.) angles. And because the four

ছকখ কোণ ঘটঙ কোণ সমান করিয়া অঙ্কিত কর পরে খগ সংযুক্ত কর। ছকজ সরল রেখা কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং স্পর্শ চিহ্ন ক হইতে কগ নিঃসৃত হইয়াছে একা-  
রণ (৩।৩২), জকগ কোণ অপর পার্শ্বীয় খঙজ কখগ কোণের  
সমিত সমান। অপর জকগ কোণ ঘটঙ সমান সুতরাং  
কখগ কোণও ঘটঙ সমান। তদ্রূপ কগখ কোণ ঘটঙ সমান  
অতএব অবশিষ্ট খকগ কোণও ওঘচ সমান (১।৩২)  
সুতরাং কখগ ত্রিভুজ ঘটঙ ত্রিভুজের সমান কোণি হইয়া  
কখগ দ্বা. তে অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাঙ্কি এখনে সম্পাদ্য।

সং উ। ছকজ ক চিহ্নে . স্পর্শ করে .  $\therefore \angle কখগ = \angle$   
 $\angle জকগ (৩।৩২) = \angle ঘটঙ। তদ্রূপ \angle কগখ = \angle ঘটঙ \therefore$   
অবশিষ্ট  $\angle খকগ = অবশিষ্ট \angle ওঘচ \therefore \Delta কখগ ও \Delta$   
ঘটঙ সমান কোণি।

### ৩ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

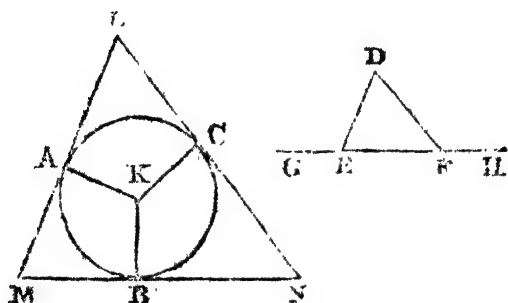
এক নির্দিষ্ট দ্বিভুজের সমান কোণি দ্বিভুজ নির্দিষ্ট বৃত্তো-  
পরি অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং ঘটঙ নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। কখগ  
বৃত্তোপরি ঘটঙ ত্রিভুজের সমান কোণি এক দ্বিভুজ অঙ্কিত  
করিতে হইবে।

ঙচ সরল রেখা দুই দিকে ছ এবং জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং  
কখগ বৃত্তের ট কেন্দ্র নির্দেশ করিয়া তথা হইতে টখ সরল  
রেখা নিষ্কাশন কর। ট বিন্দুতে টখ সরল রেখায় খটক কোণ  
ঘঙজ কোণের সমান করিয়া (১।২৩) এবং খটগ কোণ ঘটজ  
কোণের সমান করিয়া নিষ্কাশন কর পরে ক, খ, গ বিন্দু দিয়া  
কখগ বৃত্ত স্পর্শক ঠড, ডঢ, ঠঢ সরল রেখা টান (৩।১৭)। ঠড  
ডঢ, ঠঢ, সরল রেখা কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং ট কেন্দ্র  
হইতে ক, খ, গ, স্পর্শ চিহ্ন পর্য্যন্ত টক, টখ, টগ সরল রেখা টান।

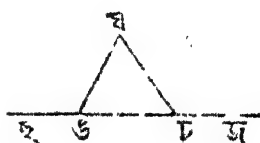


angles of the quadrilateral figure  $AMBK$  are equal to four right angles, for it can be divided into two triangles and because two of them,  $KAM$ ,  $KBM$  are right



angles, the other two  $AKB$ ,  $AMB$  are equal to two right angles. But the angles  $DEG$ ,  $DEF$ , are likewise equal (13. 1.) to two right angles; therefore the angles  $AKB$ ,  $AMB$  are equal to the angles  $DEG$ ,  $DEF$ , of which  $AKB$  is equal to  $DEG$ ; wherefore the remaining angle  $AMB$  is equal to the remaining angle  $DEF$ . In like manner, the angle  $LMN$  may be demonstrated to be equal to  $DFE$ ; and therefore the remaining angle  $MLN$  is equal (32. 1.) to the remaining angle  $EDF$ : Wherefore the triangle  $LMN$  is equiangular to the triangle  $DEF$ : And it is described about the circle  $ABC$ . Which was to be done.

*Symb. Dem.*  $\angle$ s at  $A, B, C$  are right  $\angle$ s (18.3) and 4  $\angle$ s of the Fig.  $AMBK = 4$  right  $\angle$ s and  $\angle KAM + KBM = 2$  right  $\angle$ s  $\therefore \angle AMB + \angle AKB = 2$  right  $\angle$ s  $= \angle DEG + \angle DEF$  (13.3). But  $\angle AKB = \angle DEG$  (by constr.)  $\therefore \angle AMB = \angle DEF$ . Similarly  $\angle LNM = \angle DFE \therefore \angle MLN = \angle EDF \therefore \triangle MLN$  is equiangular to  $\triangle DEF$ .



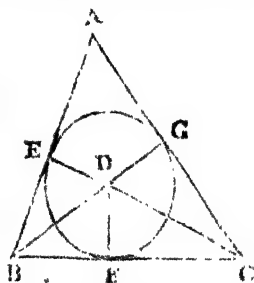
সং উ। ক, খ, গ, বিদ্যুৎ  $\angle$  সম  $\angle$  (৩।১৮) এবং কডথট  
কেন্দ্রস্থ  $8\angle = 8$  সম  $\angle$  এবং  $\angle$  টকড + টখড = ২ সম  
 $\angle$   $\therefore \angle$  কডথ +  $\angle$  কটথ = ২ সম  $\angle$  = ঘঙছ + ঘঙচ  
(১।১৩) কিন্তু  $\angle$  কটথ = ঘঙছ (অঙ্কপাত)  $\therefore \angle$  কটথ  
=  $\angle$  ঘঙচ। তদ্রূপ  $\angle$  চটড =  $\angle$  ঘচঙ  $\therefore \angle$  ডঠট =  $\angle$  ঘচ  
 $\therefore \Delta$  ডঠট ও  $\Delta$  ঘঙচ সমান কোণি।

## PROP. IV. PROB.

*To inscribe a circle in a given triangle.*

Let the given triangle be  $ABC$ , it is required to inscribe a circle in  $ABC$ .

Bisect (9. 1.) the angles  $ABC$ ,  $BCA$ , by the straight lines  $BD$ ,  $CD$ , meeting one another in the point  $D$ , from which draw (12. 1.)  $DE$ ,  $DF$ ,  $DG$  perpendiculars to  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ . Then because the angle  $EPD$  is equal to the angle  $FBD$ , the angle  $ABC$  being bisected by  $BD$ ; and because the right angle  $BED$  is equal to the right angle  $BFD$ , the two triangles  $EBD$ ,  $FBD$



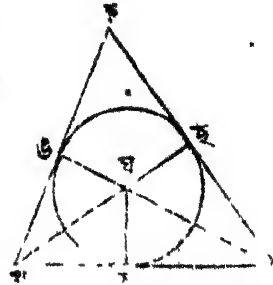
have two angles of the one equal to two angles of the other; and the side  $BD$ , which is opposite to one of the equal angles in each, is common to both; therefore their other sides are equal (26. 1.); wherefore  $DE$  is equal to  $DF$ . For the same reason,  $DG$  is equal to  $DF$ ; therefore the three straight lines  $DE$ ,  $DF$ ,  $DG$  are equal to one another, and the circle described from the centre  $D$ , at the distance of any of them, will pass through the extremities of the other two, and will touch the straight lines  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , because the angles at the points  $E$ ,  $F$ ,  $G$  are right angles, and the straight line which is drawn from the extremity of a diameter at right angles to it, touches (Cor. 16. 3.) the circle: Therefore the straight lines  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , do

## ৪ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কখন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ, তদ্ব্যতীত বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কখন এবং কখন এই দুই কোণ-  
কেন্দ্র এবং কখন দ্বারা দিখও  
কর (১।১) য বিদ্যুতে এই দুই  
রেখার সম্পাত হউক সেই য  
বিন্দু হউতে যত যত এবং যত  
সরল রেখা কখন কখন এবং কখন  
সরল রেখার উপর লম্বভাবে  
পতিত হউক (১।১২) । কখন



কোন কখন সরল রেখা দ্বারা দিখও হওয়াতে তখন কোন চতুঃ  
কোণের সমান এবং খণ্ডযু ও খচয প্রত্যেক সমকোণ এপ্রযুক্ত  
পরস্পর সমান একারণ ওখয এবং চখয দুই ত্রিভুজের মধ্যে  
একটির দুই কোণ ক্রমশঃ অন্যটির দুই কোণের সমান এবং  
সমান২ কোণের সমুখস্থ বাহু খয দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু  
রূপে আছে অতএব তাহারদের অন্যান্য বাহুও পরস্পর সমান  
(১।২৬) সুতরাং যত যত পরস্পর সমান । এই কারণ বশতঃ  
যত যত সরল রেখাও পরস্পর সমান অতএব যত, যত, যত  
এই তিন সরল রেখা পরস্পর সমান সুতরাং য বিদ্যুকে কেন্দ্র  
করিয়া এই তিনের মধ্যে কোন রেখাব্যাপ্ত পর্য্যন্ত বৃত্ত আঁকিত  
করিলে সে বৃত্ত এই তিন রেখারই অগ্রাণিয়া যাইবে এবং কখন  
কখন গন্ত সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে কেননা ও চ ছ বিন্দুতে  
যে২ কোণ আছে সে সকল সম কোণ এবং ব্যাসের অগ্র বিন্দী  
হইতে লম্ব টানিলে তাহা বৃত্তকে স্পর্শ করে (৩।১৬ অনুমান)  
অতএব কখন কখন গন্ত সরল রেখা প্রত্যেক বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে

each of them touch the circle, and the circle  $BEFG$  inscribed in the triangle  $ABC$ . Which was to be done

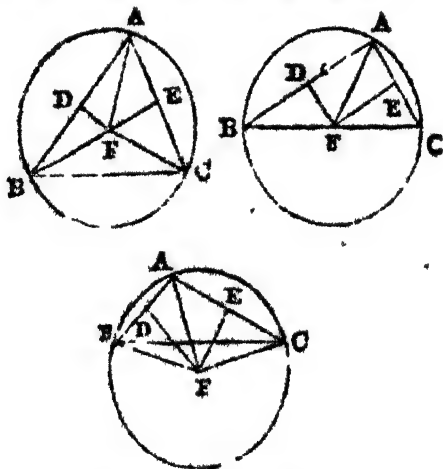
*Sym. Dem.*  $\angle EBD = \angle FBD$  (by constr.)  $\angle BLD = \angle BFD$  (by constr.) and  $LD$  is common to  $\triangle EBD, \triangle FBD \therefore DE = DF$  (26.1). Similarly  $DG = DF \therefore LE = LG = DF \therefore DG, DF, DE$ , are radii of a  $\odot$  touched by  $AB, BC, AC$  (Cor. 16.3).

### PROP. V. PROB.

*To describe a circle about a given triangle.*

Let the given triangle be  $ABC$ ; it is required to describe a circle about  $ABC$

Bisect (10. 1.)  $AB, AC$  in the points  $D, E$ , and from these points draw  $DF, EF$  at right angles (11. 1.) to



$AB, AC$ ;  $DF, EF$  produced will meet one another; for, if they do not meet, they are parallel, wherefore  $AB, AC$  which are at right angles to them are parallel,

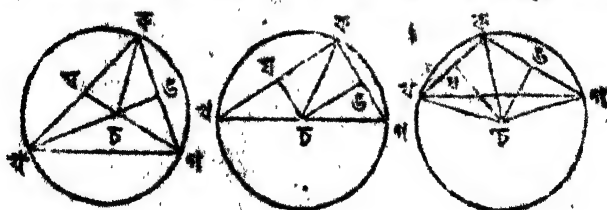
সুতরাং ওচর বৃত্ত কখন ত্রিভুজের অন্তর্গত হইল, ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য ।

সং উ ।  $\angle$  ওখঘ =  $\angle$  চখন (অঙ্গপাত)  $\angle$  খগঘ =  $\angle$  খচঘ (অঙ্গপাত) এবং খঘ  $\Delta$  ওখা ও  $\Delta$  চখঘ পক্ষে সামান্য বাহু  $\therefore$  ঘগ = ঘচ (১।২৬) ওক্রপ ঘহ = ঘচ  $\therefore$  ঘগ = ঘহ = ঘচ  $\therefore$  ঘহ, ঘচ, ঘগ রেখা কখন কখন কগ রেখা স্পষ্টে ৩ ককট (৩।১৬ অনুমান)

### ৫ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের উপরি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে । কখন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ, তাহার উপরে বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কখন কখন দুই সরল রেখাকে য এবং ও বিন্দুতে বিখণ্ড কর (১।১০) এবং ঐ দুই বিন্দু হইতে কখন কখন সরল রেখার লম্ব স্বরূপ ঘচ এবং ওচ টান (১।১১) । অপর ঘচ ওচ বন্ধি পাইলে অবশ্য কোন স্থলে পরস্পর সংলগ্ন হইবে যদি সংলগ্ন না হয় তবে তাহার সমান্তরাল হইবে এবং কখন কখন সরল রেখাও তাহারদের লম্ব প্রযুক্ত সমা-



নান্তরাল উপপন্ন হইবে কিন্তু তাহা হইলে যুক্তি বিরুদ্ধ হয় সুতরাং তদ্রূপ কল্পনা করা যায় না অতএব ঐ দুই রেখা চ বিন্দুতে সংলগ্ন হউক । চক সংযুক্ত কর এবং চ বিন্দু যদি খগ সরল রেখা হইয়া না হয় তবে খচ ওচ ও সংযুক্ত কর । অপর

which is absurd: Let them meet in  $F$ , and join  $FA$  also, if the point  $F$  be not in  $BC$ , join  $BF$ ,  $CF$ . then because  $AD$  is equal to  $DB$ , and  $DF$  common, and a right angles to  $AB$ , the base  $AF$  is equal (4. 1.) to the base  $FB$ . In like manner, it may be shewn, that  $CF$  is equal to  $FA$ ; and therefore  $BF$  is equal to  $FC$  and  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$  are equal to one another; wherefore the circle described from the centre  $F$ , at the distance of one of them, will pass through the extremities of the other two, and be described about the triangle  $ABC$ . Which was to be done.

Cor. When the centre of the circle falls within the triangle, each of its angles is less than a right angle; each of them being in a segment greater than a semicircle; but when the centre is in one of the sides of the triangle, the angle opposite to this side, being in a semicircle, is a right angle; and if the centre falls without the triangle, the angle opposite to the side beyond which it is, being in a segment less than a semicircle, is greater than a right angle. Wherefore, if the given triangle be acute-angled, the centre of the circle falls within it; if it be a right-angled triangle, the centre is in the side opposite to the right angle; and if it be an obtuse-angled triangle, the centre falls without the triangle, beyond the side opposite to the obtuse angle.

Syn. Dem.  $AD = DB$  (by constr.)  $DF$  common to  $\triangle ADF$   $\triangle BDF$  and  $DF \perp AB \therefore AF = FB$  (4. 1.) Similarly  $CF = AF \therefore FB = CF = AF \therefore$  the  $\odot$  described from  $F$  at the distance  $FB$  will pass through  $A, B, C$ .

# PROP. VI. PROB.

To inscribe a square in a given circle.

Let  $ABCD$  be the given circle, it is required to inscribe a square in  $ABCD$ .

কথ যথ সমান এবং ঘট রেখা কটঘ এবং খটঘ দুই ত্রিভুজের সমান্য বাহু অথচ কথ সরল রেখার লম্ব অতএব (১৪) খট ভূমি কট ভূমির সমান হইবে। তদ্রূপ গট কট দুই রেখাও সমান ইহা সপ্রমাণ হইতে পারে অতএব খট গট রেখাও সমান সুতরাং খট কট গট তিন সরল রেখা পরস্পর সমান একারণ ঐ তিনের কোন রেখার পরিমাণ দূর চ বিন্দু হইতে বস্তুর টানিলে তাহা সমুদায় অগ্র দিয়া যাইবে এবং কথগ ত্রিভুজোপরি অঙ্কিত হইবে। ইহাই এতলে সম্পাদ্য।

অনুমান। বৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যে পড়িলে ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ অর্দ্ধ বৃত্তাপেক্ষা বৃহত্তর খণ্ডিত হওয়াতে সম কোণ হইতে স্থান হইবে। ত্রিভুজের কোন বাহুতে কেন্দ্র সম্পাত হইলে সেই বাহুর সমুখবর্তি কোণ অর্দ্ধ বৃত্ত প্রযুক্ত সম কোণ হইবে। ত্রিভুজের বাহিরে কেন্দ্রপাত হইলে যে বাহুর বাহিরে কেন্দ্রপাত হয় তাহার সমুখবর্তি কোণ অর্দ্ধ বৃত্ত হইতে লঘুতর খণ্ডিত প্রযুক্ত সমকোণ হইতে অধিক হইবে। অতএব নির্দিষ্ট ত্রিভুজ লম্বকোণ হইলে তদ্ব্যতীত কেন্দ্রপাত হয়, সমকোণ হইলে সমকোণের সমুখবর্তি বাহুতে কেন্দ্রপাত হয়, অধিক কোণ হইলে অধিক কোণের সমুখবর্তি বাহু উল্লম্ব করিয়া ত্রিভুজের বাহিরে কেন্দ্রপাত হয়।

কথ = যথ (অঙ্কপাত), ঘট, কথট ও খঘট দুই ত্রিভুজের সমান্য বাহু এবং ঘট  $\perp$  কথ  $\therefore$  কট = চথ (১৪) তদ্রূপ গট = কট  $\therefore$  চথ = গট = কট  $\therefore$  চ কেন্দ্র হইতে চথ দূরে  $\odot$  অঙ্কিত করিলে তাহা ক, খ, গ সংলগ্ন হইবে।

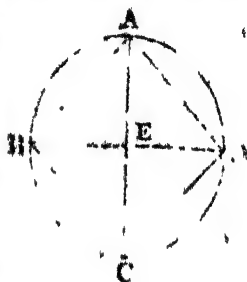
### ৬ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দিষ্ট দূরে সম চতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবেক।  
কথগয নির্দিষ্ট বৃত্ত, তদ্ব্যতীত সম চতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবেক।



# PROPOSITION VII.

Draw the diameters AC, BD at right angles to another, and join AB, BC, CD, DA; because BE is equal to ED, E being the centre, and because EA is at right angles to BD, and common to the triangles ABE, ADE; the base BA is equal (4.1.) to the base AD; and for the same reason, BC, CD are each of them equal to BA or AD; therefore the quadrilateral figure ABCD is equilateral. It is also rectangular, for the straight line BD being a diameter of the



circle ABCD, BAD is a semicircle; wherefore the angle BAD is a right (31.3.) angle; for the same reason, each of the angles ABC, BCD, CDA is a right angle; therefore the quadrilateral figure ABCD is rectangular, and it has been shown to be equilateral; therefore it is a square; and it is inscribed in the circle ABCD. Which was to be done.

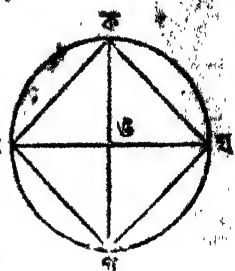
*Sym. Dem.* BE = ED, EA  $\perp$  BD and common  $\angle$ s AEB, AED  $\therefore$  (4.1) BA = AD. Similarly BC = CD = AD = BA  $\therefore$  fig. ABCD is equilateral.  $\angle$  BAD is a right  $\angle$  (31.3) Similarly  $\angle$ s ABC, BCD, CDA, are right  $\angle$ s  $\therefore$  fig. ABCD is rectangular  $\therefore$  it is a square.  $\square$ .

## PROP. VII. PROB.

*To describe a square about a given circle.*

Let ABCD be the given circle; it is required to describe a square about it.

কখ খঘ দুই ব্যাস পরস্পর লম্বভাবে টানিয়া কখ, খঘ, ঘগ-  
ঘক সংযুক্ত কর। ও কেন্দ্র হওয়াতে  
খঘ ঘগ পরস্পর সমান (১১১ সংজ্ঞা)  
কঙ রেখা খঘ পরস্পর রেখার লম্ব এবং  
কখঙ কঘঙ দুই ত্রিভুজের সামান্য  
বাহু হওয়াতে ঋক ভূমি কখ ভূমির  
সমান উপপন্ন হইল (১১৪)। এই কারণে  
খঘ ও ঘগ দুই সরল রেখাও প্রত্যেকে



ঋক প্রথমে কখ সমান সূত্রাৎ কখগঘ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সম  
বাহুক। অপর এই ক্ষেত্র সমকোণিও বটে কেননা খঘ সরল  
রেখা কখগঘ বস্তুর ব্যাস হওয়াতে ঋক ঋক বৃত্ত ত্রিভুজ  
ঋকঘ কোণ সমকোণ (১৩১) এই কারণে কখগ ঋকঘ এবং গঘক  
তিন কোণও প্রত্যেকে সমকোণ অতএব কখগঘ চতুর্ভুজ  
সমকোণি। পূর্বে তাহা সমবাহুকও উপপন্ন হইয়াছে সূত্রাৎ  
এ ক্ষেত্র সমচতুর্ভুজ এবং কখগঘ বস্তুর অন্তর্গত হইয়াছে।  
ইহাই এস্থলে সঙ্গাদ।

খ, খঘঙ, ওক। খঘ এবং কঙখ ও কঙঘ ত্রিভুজের  
সামান্য বাহু  $\therefore$  (১১৪) ঋক = কঘ তদুপ খগ = গঘ = কঘ =  
খক  $\therefore$  কখগঘ ক্ষেত্র সমবাহুক। অপিচ  $\angle$  ঋকঘ সম  $<$   
(১৩১) তদুপ কখগ, খঘঘ, গঘকও সম  $<$   $\therefore$  কখগঘ সম  
কোণি  $\therefore$  তাহা  $\square$ ।

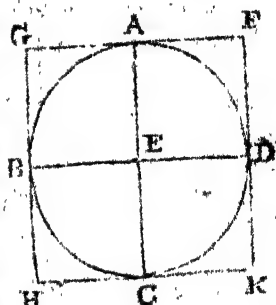
### ৭ প্রতিজ্ঞা। সঙ্গাদ।

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তোপরি সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে  
হইবে।

কল্পনানির্দিষ্ট বৃত্ত, তাহার উপরে সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত  
করিতে হইবে।

Draw two diameters  $AC$ ,  $BD$  of the circle  $ABCD$ , at right angles to one another, and through the points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  draw (17. 3.)  $FG$ ,  $GH$ ,  $HK$ ,  $KF$  touching the circle; and because  $FG$  touches the circle  $ABCD$ , and  $EA$  is drawn from the centre  $E$  to the point of contact  $A$ , the angles at  $A$  are right (18. 3.) angles; for the same reason, the angles at the points  $B$ ,  $C$ ,  $D$  are right angles; and because the angle  $AEB$  is a right angle, as likewise is  $EBG$ ,  $GH$  is parallel (28. 1.) to  $AC$ : for

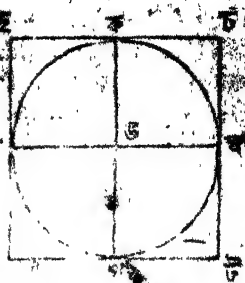
the same reason,  $AC$  is parallel to  $FK$ , and, in like manner,  $GF$ ,  $HK$  may each of them be demonstrated to be parallel to  $BD$ ; therefore the figures  $GK$ ,  $GC$ ,  $AK$ ,  $FB$ ,  $BK$ , are parallelograms; and  $GF$  is therefore equal (34. 1.) to  $HK$ , and  $GH$  to  $FK$ ; and because  $AC$  is equal to  $BD$ , and also  $H$



to each of the two  $GH$ ,  $FK$ ; and  $BD$  to each of the two  $GF$ ,  $HK$ :  $GH$ ,  $FK$  are each of them equal to  $GF$  or  $HK$ ; therefore the quadrilateral figure  $FGHK$  is equilateral. It is also rectangular; for  $GBEA$  being a parallelogram, and  $AEB$  a right angle,  $AGB$  (34. 1.) is likewise a right angle. In the same manner, it may be shewn, that the angles at  $H$ ,  $K$ ,  $F$  are right angles: therefore the quadrilateral figure  $FGHK$  is rectangular; and it was demonstrated to be equilateral; therefore it is a square; and it is described about the circle  $ABCD$ . Which was to be done.

*Syn. Dem.*  $\angle$ s at  $A$ , are right  $\angle$ s (18. 3.) so are  $\angle$ s at  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .  $GH \parallel AC$  (28. 1.). Similarly  $AC \parallel FK$ , and  $GF$ ,  $HK$  each  $\parallel BD$ .  $GK$ ,  $GC$ ,  $AK$ ,  $FB$ ,  $BK$  each a  $\square$ .  $\therefore GF = HK$  (34. 1.) and  $GH = FK$ .

কখগঘ বৃত্তের কগ খঘ দুই ব্যাস পরস্পরের লম্ব ভাবে টান এবং কখ গ ঘ বিন্দু দিয়া চহ ছজ জট টট বৃত্তস্পর্শক চারি সরল রেখা টান । অপর চহ বৃত্তস্পর্শক এবং এক কেন্দ্র হইতে স্পর্শচিহ্ন ক পমা ও অঙ্কিত এ প্রযুক্ত ক বিন্দুস্থ কোণ



সমকোণ (৩।১৮) । ঐ কারণে খ, গ, ঘ, বিন্দুস্থ কোণও প্রত্যেকে সমকোণ । অপর কঙখ এবং কখজ প্রত্যেকে সমকোণ হওয়াতে ছজ কগ সরল রেখা সমানান্তরাল (১।২৮) এবং ঐ কারণে কগ চট রেখাও পরস্পর সমানান্তরাল । তদ্রূপ ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, চক টজ প্রত্যেকে ঋণ্ডখ সরল রেখার সমানান্তরাল অতএব ছট, ছগ, কট, চখ, খট এই সকল সমানান্তরাল কেন্দ্র সূত্রাং চহ সরল রেখা জট সমান এবং ছজ চট সমান (১।৩৩) । অপর কগ সরল রেখা খঘ সমান এবং ছজ ও চট সহিতও সমান আর খঘ সরল রেখা চহ জট সমান একারণ ছজ চট প্রত্যেকে চহ অথবা জট সমান অতএব চহজট চতুর্ভুজ কেন্দ্র সমবাহক । তাহা সমকোণিও বটে কেননা ছখডক সমানান্তরাল কেন্দ্র হওয়াতে এবং কঙখ সমকোণ হওয়াতে কছখ কোণও সমকোণ (১।৩৪) । ঐরূপে ট, জ, চ, বিন্দুস্থ কোণও সমকোণ উপপন্ন হইতে পারে সূত্রাং চহজট চতুর্ভুজ কেন্দ্র সমকোণি, পূর্বে তাহা সমবাহকও উপপন্ন হইয়াছে অতএব তাহা সম চতুর্ভুজ এবং কখগঘ বৃত্তোপরি অঙ্কিত হইয়াছে । ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য ।

সংউ। ক চিহ্নস্থ  $<$  সম  $<$  (৩।১৮) তথা খ, গ, ঘ, চিহ্নস্থ  $<$  ।  
 ∴ ছজ ॥ কগ (১।২৮) তদ্রূপ কগ ॥ চট এবং ছচ জট

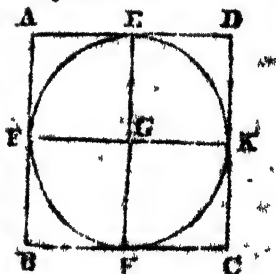
Now  $AC = BD = GH = FK = GF = HK \therefore$  Fig.  $FGHK$  is equilateral. Again  $\therefore GBEA$  is a  $\square$ , and  $\angle AEB$  a right  $\angle \therefore \angle AGB$  is a right  $\angle$  similarly  $\angle s$  at  $H, K, F$  are right  $\angle s \therefore FGHK$  is rectangular  $\therefore$  it is a  $\square$ .

### PROP. VIII. PROB.

*To inscribe a circle in a given square.*

Let  $ABCD$  be the given square; it is required to inscribe a circle in  $ABCD$ .

Bisect (10. 1.) each of the sides  $AB, AD$ , in the points  $F, E$ , and through  $E$  draw (31. 1.)  $EH$  parallel to  $AB$  or  $DC$ , and through  $F$  draw  $FK$  parallel to  $AD$  or  $BC$ ; therefore each of the figures  $AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD$  is a parallelogram, and their opposite sides are equal (34. 1.) and because  $AD$  is equal to  $AB$ , and  $AE$  is the half of  $AD$ , and  $AF$  the half of  $AB$ ,  $AE$  is equal to  $AF$ ; wherefore the sides opposite to these are equal, viz.  $FG$  to  $GE$ ; in the same manner, it may be demonstrated, that  $GH, GK$  are each of them equal to  $FG$  or  $GE$ ; therefore the four straight lines  $GE, GF, GH, GK$ , are equal to one another; and the circle described from the centre  $G$ , at the distance of one of them, will pass through the extremities of the other three; and will also touch the straight lines  $AB, BC, CD, DA$ , because the angles at the points  $E, F, H, K$  are right (29. 1.) angles, and because the straight line which is drawn



প্রত্যেকে ॥ ঋত্বঃ  $\therefore$  ছট, ভগ, কট, চখ, খট প্রত্যেকে  $\square$   $\therefore$   
 ছচ = কট  $\therefore$  চহকট কেন্দ্র সম বাহক। পুনশ্চ  $\therefore$  ছখকট  
 $\square$  এবং কঙখ সম  $< \therefore$  কহখ সম  $< \therefore$  তদ্রূপ ভ, ট চ,  
 বিন্দুহ  $<$  সম  $< \therefore$  চহকট সম কোণ  $\therefore$  তাহা  $\square$  ।

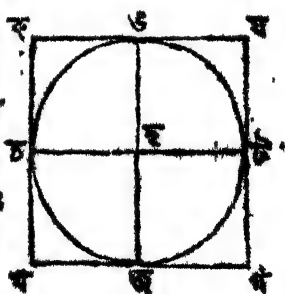
### ৮ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দিষ্ট সম চতুর্ভুজ কেন্দ্রে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে  
 হইবে।

কথগঘ নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ, তন্মধ্যে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে  
 হইবেক।

কথ এবং কঘ বাহকে চ এবং উ বিন্দুতে বিখণ্ড কর (১১০)  
 এবং উ বিন্দু দিয়া উজ সরল রেখা কঘ অথবা ঘগ রেখার  
 সমানান্তরাল করিয়া টান এবং চ বিন্দু দিয়া চট রেখা কঘ  
 অথবা খগ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান তাহাতে কট,

টখ, কজ, জখ, কহ, হুগ, খচ, হঘ ক  
 প্রত্যেকে সমানান্তরাল কেন্দ্র হইবে  
 সুতরাং তাহারদের সম্মুখবর্ত্তি বাহুও  
 পরস্পর সমান হইবে (১১৩)। অপর  
 কঘ কঘ পরস্পর সমান এবং কঙ  
 কঘ রেখার অর্দ্ধ ও কচ কঘ রেখার  
 অর্দ্ধ সুতরাং কঙ কচ পরস্পর সমান য



এবং তাহারদের সম্মুখবর্ত্তি বাহুও পরস্পর সমান একান্তর চত  
 চহ পরস্পর সমান। ঐরূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে  
 যে ছক ছট প্রত্যেকে চহ অথবা কঙ সমান অতএব ছঙ ছচ  
 ছট ছক এই চারি সরল রেখা পরস্পর সমান এবং হ কেন্দ্র  
 হইতে ঐ চারি রেখার কোন একটির পরিমাণ পর্য্যন্ত দূরে বৃত্ত  
 অঙ্কিত করিলে সে বৃত্ত সমুদয় চারি রেখার অগ্রে সংলগ্ন

from the extremity of a diameter, at right angles to it; touches the circle (Cor. 16. 3.); therefore each of the straight lines AB, BC, CD, DA touches the circle which is therefore inscribed in the square ABCD. Which was to be done.

*Sym. Dem.* Figs. AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD each a  $\square$   $\therefore$  their opposite sides are equal and  $\therefore AD = AB$  (Hyp.), and  $AE = AD$  and  $AF = AB$   $\therefore AE = AF$   $\therefore FG = GE$ . Similarly,  $GH, GK$  each =  $FG, GE$   $\therefore GE = GF = GH = GK$ , and the  $\odot$  described from G at the distance  $GE$  will pass through E, F, H, K and touch AB, BC, CD, DA. (16. 3)  $\therefore$   $\angle$ s at E, F, H, K are right  $\angle$ s (29. I).

### PROP. IX. PROB.

*To describe a circle about a given square.*

Let ABCD be the given square; it is required to describe a circle about it.

Join AC, BD, cutting one another in E; and because DA is equal to AB, and AC common to the triangles DAC, BAC, the two sides DA, AC are equal to the two BA, AC, and the base DC

is equal to the base BC; wherefore the angle DAC is equal (6. 1.) to the angle BAC, and the angle DAB is bisected by the straight line AC. In the same manner, it may be demonstrated, that the angles ABC, BCD, CDA are severally bisected by the straight lines BD, AC: there-



fore because the angle DAB is equal to the angle ABC, and the angle EAB is the half of DAB, and EBA the half of ABC; the angle EAB is equal to the angle EBA; and the side EA (6. 1.) to the side EB. In the same manner, it may be demonstrated, that each of the straight lines EC, ED is equal to EA or EB: therefore

হইবে এবং কথ খগ গঘ ঘক সরল রেখা সকলকেও স্পর্শ করিবেক কেননা ও, চ, জ, ট, বিন্দুস্থ কোণ এতদেক সম কোণ (১২৯) এবং ব্যাসার্ধে ব্যাসের লম্বপাত করিলে তাহা বৃত্ত স্পর্শ করে সুতরাং কথ খগ গঘ ঘক এই চারি সরল রেখা এতদেক বৃত্ত স্পর্শ করিবেক একারণে সে বৃত্ত কথগঘ সম চতুর্ভুজের অন্তর্গত হইল। উহাই এখানে সম্পাদ্য।

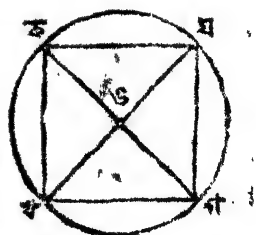
সং, উ।-কট, টখ, কজ, জঘ, কছ, ছগ, খহ, ছঘ ক্ষেত্র প্রত্যেকে ৩০° তাহারদের সমুখণ্ড বাহু সমান আর ১° কথ = কঘ (কল্পনা) এবং কট = টকঘ এবং কচ = টকখ  
∴ কঙ = কচ ∴ চছ = চঙ। উৎপন্ন হইল ছট প্রত্যেকে = চছ = চঙ ∴ ছঙ = ছচ = ছজ = ছট এবং ছ হইতে ছঙ পর্য্যন্ত ৩° নিষ্কাশন করিলে তাহা ও, চ, জ, ট বিন্দুস্থ সমলম্ব হইবে এবং কথ, খগ, গঘ, ঘক স্পর্শ করিবে (৩১৩) ∴ ও, চ, জ, ট বিন্দুস্থ < সম < (১২৯)।

## ৯ প্রতিজ্ঞা সম্পাদ্য।

এক নির্দিষ্ট সম চতুর্ভুজোপরি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কথগঘ নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজোপরি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কগ খঘ সংযুক্ত কর, ও বিন্দুতে তাহারদের সম্পাত হউক। অপর কঘ কথ সমান এবং কগ ঘকগ কখ হই ত্রিভুজের সাধ্যান্য বাহু একারণে ঘক কগ এই দুই বাহু ঘক কগ দুই বাহুর সমান এবং ঘগ ভূমি খগ ভূমির তুল্য সুতরাং ঘকগ কোণ খকগ



কোণের সমান (১৮) এবং ঘকখ কোণ কগ সরল রেখা দ্বারা বিখণ্ড হইল। ঐরূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে



the four straight lines EA, EB, EC, ED are equal to one another; and the circle described from the centre E, at the distance of one of them, must pass through the extremities of the other three, and be circumscribed about the square ABCD. *Which was to be done.*

*Syn. Dem.*  $DA = AB, DC = BC, AC$  common to  $\Delta s ADC, ABC \therefore$  (S. 1)  $\angle DAC = \angle BAC$   
 $\angle BAD$  is bisected by  $AC$ . Similarly  $\angle s ABC, BCD, CDA$  are bisected by  $BD$  and  $AC$ .  $\therefore \angle DAB = \angle ABC$ , and  $EAB = \frac{1}{2} DAB$  and  $EBA = \frac{1}{2} ABC \therefore \angle EAB = \angle EBA \therefore EA = EB$  (S. 1). Similarly  $EC = ED = EA = EB \therefore$  the circle described from E at the distance EC, will pass through A, B, C, D.

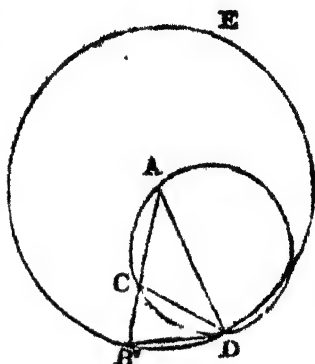
### PROP. X. PROB.

*To describe an isosceles triangle, having each of the angles at the base double the third angle.*

Take any straight line AB, and divide (II. 2.) it in the point C, so that the rectangle AB. BC may be equal to the square of AC; and from the centre A, at the distance AB, describe the circle BDE, in which place (I. 4.) the straight line BD equal to AC, which is not greater than the diameter of the circle BDE; join DA, DC, and about the triangle ADC describe (5. 4.) the circle ACD; the triangle ABD is such as is required, that is, each of the angles ABD, ADB is double the angle BAD.



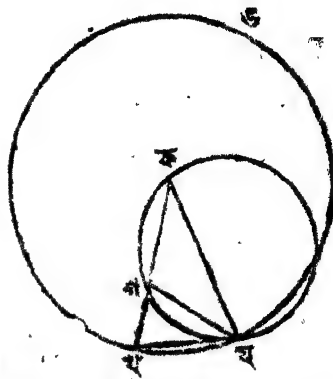
Because the rectangle  $AB \cdot BC$  is equal to the square of  $AC$ , and  $AC$  equal to  $BD$ , the rectangle  $AB \cdot BC$  is equal to the square of  $BD$ : and because, from the point  $B$  without the circle  $ACD$ , two straight lines  $BCA$ ,  $BD$  are drawn to the circumference, one of which cuts, and the other meets the circle, and the rectangle  $AB \cdot BC$  contained by the whole of the cutting



line, and the part of it without the circle, is equal to the square of  $BD$  which meets it; the straight line  $BD$  touches (37. 3.) the circle  $ACD$ . And because  $BD$  touches the circle, and  $DC$  is drawn from the point of contact  $D$ , the angle  $BDC$  is equal (32. 3) to the angle  $DAC$  in the alternate segment of the circle; to each of these add the angle  $CDA$ , then the whole angle  $BDA$  is equal to the two angles  $CDA$ ,  $DAC$ : but the exterior angle  $BCD$  is equal (32. 1.) to the angles  $CDA$ ,  $DAC$ ; therefore also  $BDA$  is equal to  $BCD$ ; but  $BDA$  is equal (5. 1.) to  $CBD$ , because the side  $AD$  is equal to the side  $AB$ ; therefore  $CBD$ , or  $DBA$  is equal to  $BCD$ ; and consequently the three angles  $BDA$ ,  $DBA$ ,  $BCD$ , are equal to one another. And because the angle  $DBC$  is equal to the angle  $BCD$ , the side  $BD$  is equal (6. 1.) to the side  $DC$ ; but  $BD$  was made equal to  $CA$ ; therefore also  $CA$  is equal to  $CD$ , and the angle  $CDA$  equal (5. 1.) to the angle  $DAC$ ; therefore the angles  $CDA$ ,  $DAC$  together are double the angle

যকঃ যগঃ সংযুক্ত কর এবং  
কখগ ত্রিভুজোপরি কগঘ  
বৃত্ত অঙ্কিত কর (৩।৫)।  
কখঘ এস্থলে ইষ্ট ত্রিভুজ  
অর্থাৎ কখঘ কখখ প্রত্যেক  
কোণ ঋকঘ কোণের দ্বিগুণ।

কখখগ আয়ত কগ  
সমচতুর্ভুজের সমান এবং  
কগ গঘ সমান একা-  
রূপ কখখগ আয়ত গঘ



রেখার সম চতুর্ভুজের তুল্য অপর কগঘ বৃত্তের  
বহিস্থ থ বিদ্যু হইতে ঋকগ এবং খগ দুই সরল রেখা  
পরিধি পমাস্ত টানা গিয়াছে তাহার একটি বৃত্তকে ছেদ  
করে অন্যটি বৃত্তেতে সংলগ্ন মাত্র এবং ছেদক রেখার  
সমুদয় ও বৃত্তবহিস্থ অংশের আয়ত অর্থাৎ কখখগ  
সংলগ্ন থয রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইয়াছে একারণ  
(৩।৩৭) থয সরল রেখা কগঘ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে।  
অপিচ থয রেখা বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে এবং যগ রেখা স্পর্শ  
চিকু য হইতে নিষ্ক্রান্ত হইয়াছে অতএব ঋকঘগ কোণ বৃত্তের  
অপর পার্শ্বের ঋগুস্থ ঋকগ কোণের সমান (৩।৩২) এই দুই  
তুল্য কোণেতে গঘক কোণ যোগ করিলে সমুদয় থঘক কোণ  
গঘক ঋকগ এই দুই কোণের সমান হইবে কিন্তু বহিস্থ ঋকঘ  
কোণ গঘক এবং ঋকগ দুই কোণের তুল্য (১।৩২) সুতরাং ঋকঘ  
থগয সমান। অপর কখকখ দুই বাহু সমান হওয়াতে (১।৫) থঘক  
গখয সমান হইতেছে অতএব গখয অথবা ঋকঘ কোণ থগয  
সমান সুতরাং ঋকঘ থঘক থগয এই তিন কোণ পরস্পর সমান  
অপর থঘগ কোণ থগয কোণের সমান হওয়াতে থঘ বাহু ও গঘ  
সমান হইবে (১।৬)। থয কগ রেখার তুল্য বৃত্ত হইয়াছে অতঃ

DAC; but BCD is equal to the angles CDA, DAC (32.1.); therefore also BCD is double DAC. But BCD is equal to each of the angles BDA, DBA, and therefore each of the angles BDA, DBA is double the angle DAB; wherefore an isosceles triangle ABD is described, having each of the angles at the base double the third angle. Which was to be done.

"Cor. 1. The angle BAD is the fifth part of two right angles. For, since each of the angles ABD and ADB is equal to twice the angle BAD, they are together equal to four times BAD, and therefore all the three angles ABD, ADB, BAD, taken together, are equal to five times the angle BAD. But the three angles ABD, ADB, BAD are equal to two right angles, therefore five times the angle BAD is equal to two right angles; or BAD is the fifth part of two right angles.

"Cor. 2. Because BAD is the fifth part of two, or the tenth part of four right angles, all the angles about the centre A are together equal to ten times the angle BAD, and may therefore be divided into ten parts each equal to BAD. And as these ten equal angles at the centre must stand on ten equal arches, therefore the arch ED is one-tenth of the circumference; and the straight line BD, that is AC, is therefore equal the side of an equilateral decagon inscribed in the circle BDE."

Syn. Dem.  $\therefore AB \cdot BC = AC^2$  and  $AC = BD \therefore AB \cdot BC = BD^2 \therefore (37.3) BD$  touches the  $\odot ACD$ ;

এবং কণ রেখাও গণ রেখার তুল্য হইবে সুতরাং গণক কোণ গণক সমান (১।৫) অতএব গণক গণক দুই কোণ একত্র যোগে ঋকষ কোণের দ্বিগুণ হইবে। পরন্তু ঋগষ কোণ গণক গণক এই দুই কোণের তুল্য (১।৩২) একারণ ঋগষ কোণও গণক কোণের দ্বিগুণ এবং ঋগষ কোণ ঋকষ ঋকষ প্রত্যেকের সমান অতএব ঋকষ ঋকষ প্রত্যেকে ঋকষ কোণের দ্বিগুণ সুতরাং ঋকষ এমত এক সমদ্বিবাহক ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে সাধারণ ভূমিত্র দুই কোণ প্রত্যেকে তৃতীয় কোণের দ্বিগুণ। ইহাই অঙ্কনে সমাদান্য।

১ অস্থানান। ঋকষ কোণ দুই সমকোণের পঞ্চমাংশ কেননা ঋকষ ঋকষ প্রত্যেকে ঋকষ কোণের দ্বিগুণ হওয়াতে তাহার একত্র যোগে ঋকষ কোণের চতুগুণ হইবে এবং ঋকষ ঋকষ ও ঋকষ এই তিন কোণ একত্র যোগে ঋকষ কোণের পঞ্চগুণ হইবে। অধিকন্তু ঋকষ ঋকষ এবং ঋকষ এই তিন কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণের তুল্য সুতরাং ঋকষ কোণ পঞ্চগুণিত হইলে দুই সমকোণের তুল্য হইবে অর্থাৎ ঋকষ দুই সমকোণের পঞ্চমাংশ।

২ অস্থানান। ঋকষ দুই সমকোণের পঞ্চমাংশ অর্থাৎ চারি সমকোণের দশমাংশ হওয়াতে ক কেন্দ্রস্থ সমদ্বিবাহক কোণ একত্র যোগে ঋকষ কোণের দশগুণ হইবে সুতরাং সেই সকল কোণকে দশ ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগ ঋকষ সমান হইবে। অপর কেন্দ্রের এই দশ কোণ অবশ্য দশ সমান চাপের উপরিস্থ হইবে অতএব ঋকষ চাপ পরিধির দশমাংশ উপপন্ন হইল সুতরাং ঋকষ অথবা কণ সরল রেখা ঋকষ বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু দশভুজ কেন্দ্রের বাহু তুল্য হইবে।

সং উ। ∴ কথ. ঋগ = কণ. এবং কণ = ঋগ ∴ কথ. ঋগ = ঋগ. ∴ (৩।৩৭) ঋগ কণ. ৩ স্পর্শক ∴ < ঋগণ = < ঋকণ (৩।৩২) ∴ < ঋক = < ঋকণ + < গণক।

$\angle BDC = \angle DAC$  (32.3)  $\therefore \angle BDA = \angle DAC + \angle CDA$ . But  $\angle BCD = \angle CDA + \angle DAC$  (32.1)  $\therefore \angle BCD = \angle BDA$ . But  $\angle BDA = \angle CBD$  (5. 1)  $\therefore \angle CBD$  or  $\angle DBA = \angle BCD = \angle BDA \therefore BD = DC$  (6.1)  $\therefore DC = CA \therefore \angle CDA = \angle DBC$   $\therefore \angle CDA + \angle DAC = \angle BCD = 2 \angle DAC \therefore \angle BDA$  or  $\angle DBA = 2 \angle DAC$ .

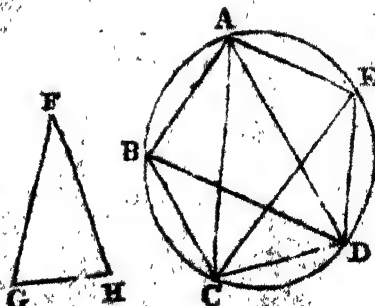
### PROP. XI. PROB.

*To inscribe an equilateral and equiangular pentagon in a given circle.*

Let  $ABCDE$  be the given circle, it is required to inscribe an equilateral and equiangular pentagon in the circle  $ABCDE$ .

Describe (10. 4.) an isosceles triangle  $FGH$ , having each of the angles at  $G, H$ , double the angle at  $F$ ; and in the circle  $ABCDE$  inscribe (2. 4) the triangle  $ACD$  equiangular to the triangle  $FGH$ , so that the angle  $CAD$  may be equal to the angle at  $F$ , and each of the angles

$\angle ACD, \angle CDA$  equal to the angle at  $G$  or  $H$ ; wherefore, each of the angles  $\angle ACD, \angle CDA$  is double the angle  $\angle CAD$ . Bisect (9. 1.) the angles  $\angle ACD, \angle CDA$  by the



straight lines  $CE, DB$ ; and join  $AB, BC, DE, EA$   $ABCDE$  is the pentagon required.

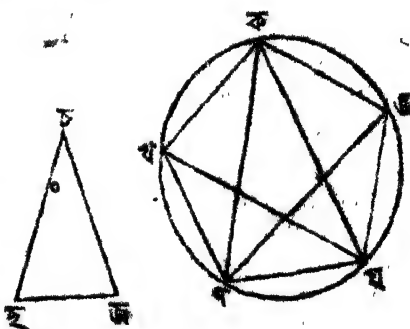
খগষ = খকগ + গযক (১৩২)। কিন্তু  $\angle$  খযক =  $\angle$  যখক (১৫)  $\therefore \angle$  যখক অর্থাৎ গখক =  $\angle$  খগয  $\therefore$  খয = গয (১৬)  $\therefore$  যগ = গক  $\therefore \angle$  গযক =  $\angle$  যকগ  $\therefore \angle$  গযক + যকগ =  $2\angle$  যকগ  $\therefore \angle$  খগয =  $2\angle$  যকগ  $\therefore \angle$  যখক অথবা  $\angle$  যখক =  $2\angle$  যকয।

### ১১ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দিষ্ট বৃত্তে সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দিষ্ট বৃত্ত তন্মধ্যে সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে।

চছজ এক সম দ্বি-  
ভুজ ত্রিভুজ এবং  
কারে অঙ্কিত কর সে  
ছ এবং জ বিন্দু দুই  
কোণ প্রত্যেকে চ বি-  
ন্দু দুই কোণের দ্বিগুণ  
হয় (১১০) কখগঘঙ  
বৃত্তেতে কগষ ত্রিভু-  
জ চছজ ত্রিভুজের



তুল্য কোণি করিয়া অন্তর্গত কর (১১২) যেন ক বিন্দু দুই কোণ চ বিন্দু দুই কোণ তুল্য এবং গ ও ঘ বিন্দু দুই কোণ ক্রমশঃ ছ এবং জ বিন্দু দুই কোণের তুল্য হয় তাহাতে কগষ এবং কঘগ প্রত্যেক কোণ পঞ্চভুজ কোণের দ্বিগুণ হইবে। অপর কগঘ এবং কঘগ দুই কোণকে ক্রমশঃ গঙ এবং ঘঙ দুই রেখা দ্বারা দ্বিগুণ কর এবং কখ, খগ, ঘঙ, ডক সংযুক্ত কর। কখগঘঙ এইমতে অষ্টভুজ পঞ্চভুজ।



Because the angles  $ACD$ ,  $CDA$  are each of them double  $CAD$ , and are bisected by the straight lines  $OE$ ,  $DB$ , the five angles  $DAC$ ,  $ACE$ ,  $ECD$ ,  $CDB$ ,  $BDA$  are equal to one another; but equal angles stand upon equal (26. 3.) arches; therefore the five arches  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  are equal to one another: and equal arches are subtended by equal (29. 3.) straight lines; therefore the five straight lines  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  are equal to one another. Wherefore the pentagon  $ABCDE$  is equilateral. It is also equiangular; because the arch  $AB$  is equal to the arch  $DE$ ; if to each be added  $BCD$ , the whole  $ABCD$  is equal to the whole  $EDCB$ : and the angle  $AED$  stands on the arch  $ABCD$ , and the angle  $EAB$  on the arch  $EDCB$ : therefore the angle  $BAE$  is equal (27. 3.) to the angle  $AED$ : for the same reason, each of the angles  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDE$ , is equal to the angle  $BAE$ , or  $AED$ : therefore the pentagon  $ABCDE$  is equiangular; and it has been shewn, that it is equilateral. Wherefore, in the given circle, an equilateral and equiangular pentagon has been inscribed. *Which was to be done.*

Otherwise :

" Divide the radius of the given circle, so that the  
 " rectangle contained by the whole and one of the  
 " parts may be equal to the square of the other  
 " (11. 2.) Apply in the circle, on each side of  
 " given point, a line equal to the greater of these parts  
 " then (2. Cor.) each of the arches cut off will be one  
 " tenth of the circumference, and therefore the arch  
 " made up of both will be one fifth of the circum-  
 " ference; and if the straight line subtending this  
 " arch be drawn, it will be the side of an equilate-  
 " ral pentagon inscribed in the circle."

কগঘ কঘগ প্রত্যেকে গকঘ কোণের দ্বিগুণ এবং ক্রমশঃ গঙ ঘঘদ্বারা দ্বিখণ্ডিত একারণ গকঘ, কগঙ, গুগঘ, গঘঘ, খঘক এই পঞ্চ কোণ পরস্পর সমান। অধিকন্তু বৃত্তের মধ্যে সমান২ কোণ সমান২ চাপোপরি থাকে (৩২৬) অতএব কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ওক, এই পঞ্চ চাপ পরস্পর সমান। অপিচ সমান২ চাপ সমান২ সরল রেখার সম্মুখস্থ থাকে (৩২৭) একারণ কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ওক, এই পঞ্চ রেখা পরস্পর সমান সুতরাং কখগঘঙ পঞ্চ তুজ সমবাহক। অপর তাহা সমান কোণিও বটে কেননা কখ চাপ ঘঙ চাপের সমান হওয়াতে তাহারদের প্রত্যেকে খগঘ চাপ যোগ করিলে কখঘ চাপ খগঘঙ চাপ তুল্য হইবে এবং কঙঘ কোণ কখগঘ চাপোপরিস্থ ও খকঙ কোণ খগঘঙ চাপোপরিস্থ হওয়াতে কঙঘ কোণ খকঙ তুল্য (৩২৭) তদ্রূপ কখগ খগঘ ঘঘঙ কোণ প্রত্যেকে খকঙ অথবা কঙঘ কোণের সমান উপপন্ন হইবে। সুতরাং কখগঘঙ পঞ্চতুজ সমান কোণি এবং তাহাসমবাহক পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে অতএব নির্দিষ্ট নষ্টে সমবাহক ও সমান কোণি পঞ্চতুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

### প্রকারান্তর

নির্দিষ্ট বৃত্তের কক টকে এমন রূপে বিভাগ কর যে সমুদয় এবং একাংশের আয়ত দ্বিতীয়াংশের সমচতুর্ভুজ তুল্য হয় (২১১) পরে এক নির্দিষ্ট বিন্দুর প্রত্যেক দিকে ঐ বৃত্তের সরল রেখার সম্মুখ রেখা বৃত্তেতে স্থাপিতকর তাহাতে যে দুই চাপ ছিন্ন হইবে তাহার প্রত্যেকে পরিধির দশমাংশ তুল্য হইবে (৪১০ দ্বিতীয় অধ্যায়) সুতরাং ঐ দুই চাপ একত্র যোগে পরিধির পঞ্চমাংশ হইবে এবং সে চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখা নিজস্ব করিলে তাহা বৃত্তান্তর্গত সমবাহক পঞ্চতুজের বাহু হইবে।

*Sym. Dem.*  $\therefore \angle s$  ACD, CDA are bisected by CE and DB, and each of them =  $2 \text{ CAD} \therefore \angle \text{DAC} = \angle \text{ACE} = \angle \text{ECD} = \angle \text{CDB} = \angle \text{BDA} \therefore \text{arc CD} = \text{arc AE} = \text{arc ED} = \text{arc BC} = \text{arc AB}$  (26. 3)  $\therefore \text{CD} = \text{AE} = \text{ED} = \text{BC} = \text{AB}$  (29. 3)  $\therefore$  Pentag. ABCDE is equilateral. Again arc AB = arc DE  $\therefore$  arc AB + arc BCD i. e. the arc ABCD = arc DE + arc BCD i. e. the arc BCDE  $\therefore \angle \text{AED} = \angle \text{BAE}$  (27. 3) similarly  $\angle \text{ABC} = \angle \text{BCD} = \angle \text{CDE} = \angle \text{AED} = \angle \text{BAE} \therefore$  Pentag. ABCDE is equiangular.

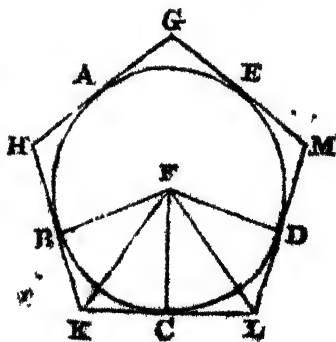
### PROP. XII. PROB.

*To describe an equilateral and equiangular pentagon about a given circle*

Let ABCDE be the given circle, it is required to describe an equilateral and equiangular pentagon about the circle ABCDE.

Let the angles of a pentagon, inscribed in the circle, by the last proposition, be in the points A, B, C, D, E, so that the arches AB, BC, CD, DE, EA are equal (11. 4), and through the points A,

B, C, D, E draw GH, HK, KL, LM, MG, touching (17. 3.) the circle; take the centre F, and join FB, FK, FC, FL, FD. And because the straight line KL touches the circle ABCDE in the point C, to which FC is drawn from the centre F, FC is perpendi-



cular (18. 3.) to KL; therefore each of the angles at C is a right angle; for the same reason, the angles at the points B, D are right angles; and

সং উ, ।  $\therefore$   $\angle$ কগঘ এবং গঘক গঙ ও ঘখ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত  
এবং প্রত্যেক = ২ গকঘ :  $\angle$ ঘকগ = কগঙ = গগঘ = গঘখ  
= খঘক : চাপ গঘ = চাপ কঙ = চাপ গঘ = চাপ খগ = চাপ  
কখ (৩।২৬)  $\therefore$  গঘ = কঙ = গঘ = খগ = কখ (৩।২৯)  $\therefore$  পঞ্চ  
ভুজ কখগঘঙ সমবাহক। অধিকন্তু চাপ কখ = চাপ ঘঙ :  
চাপ কখ + চাপ খগঘ অর্থাৎ চাপ কখগঘ = চাপ ঘঙ + চাপ  
খগঘ অর্থাৎ চাপ খগঘঙ :  $\angle$ কগঘ =  $\angle$ খকঙ (৩।২৭) তদুপ  
কখগ = খগঘ = গঘঙ = কঙঘ = খকঙ : অতঃপর কখগঘঙ  
সমান কোণি।

## ১২ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ।

নির্দিষ্ট বৃত্তোপরি সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ  
ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দিষ্ট বৃত্ত, তাহার উপর সমবাহক এবং সমান  
কোণি পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

পূর্ব প্রতিজ্ঞার ধারায়সারে বৃত্তায়গত পঞ্চভুজ কল্পনা কর  
ক, খ, গ, ঘ, ও সেই কেন্দ্রের কোণ চিহ্ন হউক তাহাতে কখ, খগ-  
গঘ, ঘঙ, ওক এই পঞ্চ চাপ পরস্পর সমান হইবে (৩।১১)

অনন্তর ক, খ, গ, ঘ, ও বিন্দু দিয়া ছজ, জট, টঠ, ঠড, ডছ, বৃত্ত  
স্পর্শক রেখা টান (৩।১৭)

এবং চ কেন্দ্র নির্দেশ করিয়া

চখ চট চগ চঠ চঘ সংযুক্ত

করা টঠ বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে

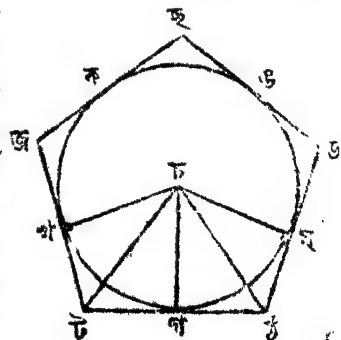
এবং কেন্দ্র হইতে গ স্পর্শ

চিহ্ন পর্যন্ত চগ সরল রেখা

নির্মিত হইয়াছে একারণ

(৩।১৮) চগ রেখা টঠ

রেখার লম্ব অতরাং গ বিন্দু



because  $\angle FCK$  is a right angle the square of  $FK$  is equal (47. 1.) to the squares of  $FC$ ,  $CK$ . For the same reason, the square of  $FK$  is equal to the squares of  $FB$ ,  $BK$ : therefore the squares of  $FC$ ,  $CK$ , are equal to the squares of  $FB$ ,  $BK$ , of which the square of  $FC$  is equal to the square of  $FB$ ; the remaining square of  $CK$  is therefore equal to the remaining square of  $BK$ , and the straight line  $CK$  equal to  $BK$ : and because  $FB$  is equal to  $FC$  and  $FK$  common to the triangles  $BFK$   $CFK$ , the two  $BF$ ,  $FK$  are equal to the two  $CF$ ,  $FK$ ; and the base  $BK$  is equal to the base  $CK$ : therefore the angle  $BFK$  is equal (8. 1) to the angle  $KFC$ , and the angle  $BKF$  to  $FKC$ : wherefore the angle  $BFC$  is double the angle  $KFC$ , and  $BKC$  double  $FKC$ : for the same reason, the angle  $CFD$  is double the angle  $CFL$ , and  $CLD$  double  $CLF$ : and because the arch  $BC$  is equal to the arch  $CD$ , the angle  $BFC$  is equal (27. 3.) to the angle  $CFD$ ; and  $BFC$  is double the angle  $KFC$ , and  $CFD$  double  $CFL$ ; therefore the angle  $KFC$  is equal to the angle  $CFL$ : now the right angle  $FCK$  is equal to the right angle  $FCL$ : and therefore in the two triangles  $FKC$ ,  $FLC$ , there are two angles of the one equal to two angles of the other, each to each, and the side  $FC$ , which is adjacent to the equal angles in each, is common to both; therefore the other sides are equal (26. 1.) to the other sides, and the third angle to the third angle: therefore the straight line  $KC$  is equal to  $CL$ , and the angle  $FKC$  to the angle  $FLC$ : and because  $KC$  is equal to  $CL$ ,  $KL$  is double  $KC$ : in the same manner, it may be shewn, that  $HK$  is double  $BK$ : and because  $BK$  is equal to  $KC$ , as was demonstrated, and  $KL$  is double  $KC$ , and  $HK$  double  $BK$ ,  $HK$  is equal to  $KL$ : in like manner, it may be shewn, that  $GH$ ,  $GM$ ,  $ML$  are each of them equal to  $HK$  or  $KL$ : therefore the pentagon  $GHKLM$  is equilateral. It is also equiangular; for, since the angle  $FKC$  is equal to the angle  $FLC$ , and

প্রত্যেক কোণ সমকোণ। ঐ কারণ বশতঃ খ এবং ঘ বিন্দু হই  
কোণও প্রত্যেকে সমকোণ। অপর চগট সমকোণ একারণ চট  
রেখার সমচতুর্ভুজ টগ গচ দুই রেখার সমচতুর্ভুজ দ্বয় তুল্য  
(১১৪৭)। ঐ কারণ বশতঃ চট রেখার সমচতুর্ভুজ চখ খট দুই  
রেখার সমচতুর্ভুজ দ্বয় তুল্য। অতএব টগ গচ দুই রেখার সম  
চতুর্ভুজ দ্বয় চখ খট দুই রেখার সমচতুর্ভুজ দ্বয় সমান, তাহার  
মধ্যে চখ গচ দুই রেখার সম চতুর্ভুজ পরস্পর সমান সুতরাং  
অবশিষ্ট খট এবং টগ দুই রেখার সমচতুর্ভুজও পরস্পর  
সমান অতএব খট টগ রেখাও পরস্পর সমান। অপর খচ গচ  
পরস্পর সমান এবং চট খচট এবং গচট ত্রিভুজের সামান্য  
বাহু হওয়াতে খচচট দুই বাহু ক্রমশঃ গচ চট দুই বাহুর  
সমান এবং খট ভূমিও টগ ভূমির তুল্য অতএব (১১৮) খচট  
কোণ গচট কোণের এবং খটট কোণ গটট কোণের সমান সুত-  
রাং খচগ কোণ টচগ কোণের এবং খটগ কোণ চটগ কোণের  
দ্বিগুণ। তদ্রূপ গচঘ কোণ গচট কোণের এবং গচঘ কোণ গটচ  
কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হইবে। অপর খগ চাপ গঘ চাপের  
সমান ভিন্নমিত্র খচগ কোণ গচঘ কোণের তুল্য (৩১২৭)। অপিচ  
খচগ কোণ টচগ কোণের এবং গচঘ কোণ গচট কোণের  
দ্বিগুণ সুতরাং টচগ কোণ গচট কোণ তুল্য। অধিকন্তু চগট সম  
কোণ চগট সমকোণের সমান অতএব চটগ চটগ দুই ত্রিভুজের  
মধ্যে একটীর দুই কোণ ক্রমশঃ অন্যটীর দুই কোণের সমান এবং  
সমান২ কোণ সংলগ্ন গচ রেখা দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু  
একারণ (১১২৬) অন্যান্য বাহুও ক্রমশঃ পরস্পর সমান এবং  
অবশিষ্ট কোণও সমান অতএব টগ রেখা গট রেখার তুল্য  
এবং চটগ কোণ চটগ কোণের তুল্য। অপর টগ টগ-সমান  
হওয়াতে টট রেখা টগ রেখার দ্বিগুণ। ঐ রূপে ইহাও উপপন্ন  
হইবে যে জট রেখা জখ রেখার দ্বিগুণ আর পূর্বে সপ্রমাণ হই-  
য়াছে যে খট টগ সমান অতএব টট রেখা টগ রেখার এবং

the angle  $HKL$  double the angle  $FKC$ , and  $KLM$  double  $FLC$ , as was before demonstrated, the angle  $HKL$  is equal to  $KLM$ ; and, in like manner, it may be shewn, that each of the angles  $KHG$ ,  $HGM$ ,  $GML$  is equal to the angle  $HKL$  or  $KLM$ , therefore the five angles  $GHK$ ,  $HKL$ ,  $KLM$ ,  $LMG$ ,  $MGH$ , being equal to one another, the pentagon  $GHKLM$  is equiangular; and it is equilateral, as was demonstrated; and it is described about the circle  $ABCDE$ . Which was to be done.

*Sym. Dem.*  $\because FC \perp KL$  (18. 3.)  $\therefore \angle$ s at  $C$  are rt.  $\angle$ s, so are  $\angle$ s at  $B$  and  $D$  rt.  $\angle$ s  $\therefore FK^2 = FC^2 + CK^2$  (47. 1.) Similarly  $FK^2 = FB^2 + BK^2 \therefore FC^2 + CK^2 = FB^2 + BK^2$  but  $FC^2 = FB^2 \therefore CK^2 = BK^2 \therefore CK = BK$ .  $\because FB = FC$  and  $FK$  common to  $\Delta$ s  $BFK$ ,  $CFK$ , and  $BK = CK \therefore$  (8. 1.)  $\angle BFK = \angle KFC$  and  $\angle BKF = \angle CKF \therefore \angle BFC = 2\angle KFC$  and  $\angle BKC = 2\angle FKC$ . Similarly  $\angle CFD = 2\angle CFL$  and  $\angle CLD = 2\angle CLF$ . Again  $\because$  arc  $BC =$  arc  $CD$ ,  $\angle BFC = \angle CFD$  (27. 3.) Now  $BFC = 2\angle KFC$ , and  $CFD = 2\angle CFL \therefore KFC = CFL$ , and  $\because FK = FC$  and  $FC$  common to  $\Delta$ s  $FKC$  and  $FLC \therefore$  (26. 1.)  $\angle FKC = \angle FLC$  and  $KC = CL \therefore KL = 2 KC$ . Similarly  $HK = 2 BK$ . Now  $\because BK = KC$ ,  $HK = KL$ . So  $GH$ ,  $GM$ ,  $ML$  each  $= HK = KL \therefore$  Pentag.  $GHKLM$  is equilateral. Further  $\because \angle FKC = \angle FLC$  and  $HKL = 2\angle FKC$  and  $KLM = 2\angle FLC \therefore HKL = KLM$ .

জট রেখা খট রেখার বিত্ত্ব হওয়াতে জট টট পরস্পর সমান। ঐ রূপে সপ্রমাণ করা যায় যে ছজ, ছড, ডট, প্রত্যেকে জট অথবা টট সমান অতএব ছজটটড পঞ্চভুজ সমবাহক উপপন্ন হইল। অপর তাহা সমান কোণিও বটে কেননা চটগ কোণ চটগ কোণের সমান হওয়াতে এবং জটট কোণ চটগ কোণের ও টটড কোণ চটগ কোণের বিত্ত্ব হওয়াতে জটট কোণ টটড কোণের সমান তক্রপ টজছ, জছড, ছডট প্রত্যেকে জটট অথবা টটড কোণের সমান উপপন্ন হইবে। অতএব ছজট, জটট, টটড টডছ, ডছজ এই পঞ্চ কোণ পরস্পর সমান হওয়াতে ছজটটড পঞ্চভুজ সমান কোণি সপ্রমাণ হইল। পূর্বে তাহা সমবাহক উপপন্ন হইয়াছে এবং কথনগত ন্যূনতাপরিও অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ, ১.  $\therefore$  চগ  $\perp$  টট (৩.১৮)  $\therefore$  গ বিন্দুস্থ  $<$  সম  $<$  তথা খ এবং ঘ বিন্দুস্থ  $<$  সম  $<$   $\therefore$  চট<sup>২</sup> = চগ<sup>২</sup> + গট<sup>২</sup> (১.৪৭)। তক্রপ চট<sup>২</sup> = চখ<sup>২</sup> + খট<sup>২</sup>  $\therefore$  চগ<sup>২</sup> + গট<sup>২</sup> = চখ<sup>২</sup> + খট<sup>২</sup>। পরন্তু চগ<sup>২</sup> = চখ<sup>২</sup>  $\therefore$  গট<sup>২</sup> = খট<sup>২</sup>  $\therefore$  গট = খট।  $\therefore$  চখ = চগ এবং চট খচট ও গচট ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং খট = টগ  $\therefore$  (১.৮)  $<$  খচট =  $<$  টচগ এবং  $<$  খটচ = গটচ  $\therefore$   $<$  খচগ =  $<$  টচগ এবং  $<$  খটগ =  $<$  চটগ। তক্রপ  $<$  গচঘ =  $<$   $<$  গচট এবং  $<$  গটঘ =  $<$   $<$  গটচ। পুনশ্চ  $\therefore$  চাপ খগ = চাপ গঘ,  $<$  খচগ =  $<$  গচঘ (১.২৭) অপর খচগ =  $<$  টচগ এবং গচঘ =  $<$  গচট  $\therefore$  টচগ = গচট এবং  $\therefore$  চগট = চগট এবং চগ চটগ ও চটগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু  $\therefore$  (১.২৬)  $<$  চটগ = চটগ ও টগ = গট  $\therefore$  টট =  $<$  টগ। তক্রপ জট =  $<$  খট। অপর  $\therefore$  খট = টগ  $\therefore$  জট = টট। তথা ছজ, ছড, ডট প্রত্যেকে = জট = টট  $\therefore$  পঞ্চ ভুজ ছজটটড সমবাহক। অপিচ  $\therefore$   $<$  চটগ = চটগ, এবং জটট



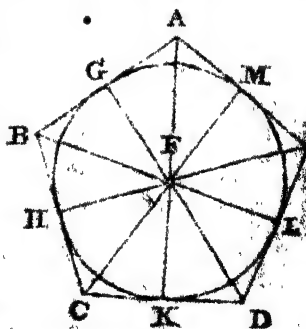
So  $\angle$ s KHG, HGM, GML each = HKL = KLM  $\therefore$  Pentag. GHKLM is equiangular.

### PROP. XIII. PROB.

*To inscribe a circle in a given equilateral and equiangular pentagon.*

Let ABCDE be the given equilateral and equiangular pentagon; it is required to inscribe a circle in the pentagon ABCDE.

Bisect (9. 1.) the angles BCD, CDE by the straight lines CF, DE, and from the point F, in which they meet, draw the straight lines FB, FA, FE: therefore, since BC is equal to CD, and CF common to the triangles BCE, DCF, the two sides BC, CF are equal to the two DC, CF; and the angle BCF is equal to the angle DCF; therefore the base BF is equal (4. 1.) to the base FD, and the other angles to the other angles, to which the equal sides are opposite; therefore the angle CBF is equal to the angle CDF: and because the angle CDE is double CDF, and CDE equal to CBA, and CDF to CBF; CBA is also double the angle CBF; therefore the angle ABF is equal to the angle CBF; wherefore the angle ABC is bisected by the straight line BF; in the same manner, it may be demonstrated, that the angles BAE, AED, are bisected by the straight lines AF, EF: from the point F draw (12. 1.)



FG, FH, FK, FL, FM perpendiculars to the straight lines AB, BC, CD, DE, EA: and because the angle HCF is equal to KCF, and the right angle FHC equal to the right angle FKC, in the triangles FHC, FKC two angles of the one are equal to two angles of the

=২ চটগ, ও টটড=২ চটগ.: জটট=টটড । তদ্রূপ টজহ, জহড, হুডট প্রত্যেকে=জটট=টটড.: পঞ্চভুজ হুজটটড সমান কোণি।

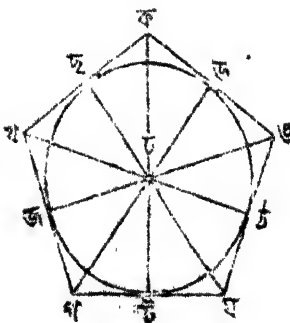
### ১৩ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

নির্দিষ্ট সমবাহুক এবং সমানকোণি পঞ্চভুজে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

কথগঘঙ নির্দিষ্ট সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ তাহাতে এক বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

খগঘ এবং গঘঙ কোণ ক্রমশঃ গচ ঘচ রেখার দ্বারা বন্ধ কর এবং ঐ দুই রেখার সম্পাত চিহ্ন চ হইতে চখ, ক, চঙ, রেখা নিষ্কাশন কর। খগ গঘ সমান এবং গচ খগচ

খগচ দুই ত্রিভুজের সমান।  
বাহু হওয়াতে খগ গচ ঘগ গচ  
সমান হইবে এবং খগচ কোণ  
ঘগচ কোণের তুল্য অতএব  
খচ ভূমি চঘ ভূমির সমান  
(১১৪) এবং সমান বাহুর  
সম্মুখস্থ অন্যান্য কোণও  
ক্রমশঃ সমান সুতরাং গঘচ



কোণ গঘচ কোণের সমান। অপর গঘঙ কোণ গঘচ কোণের  
দ্বিগুণ এবং গঘঙ গখক কোণের ও গঘচ গঘচ কোণের সমান  
হওয়াতে গখক কোণও গঘচ কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হইল  
অতএব কখচ কোণ গঘচ কোণের সমান সুতরাং কখগ কোণ  
খচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। তদ্রূপ থকঙ কঙঘ দুই  
কোণ ক্রমশঃ কচ টচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত সপ্রমাণ হইবে।  
অনন্তর চ বিন্দু হইতে চহ চজ চট চঙ রেখা কথ  
গগ গঘ খঙ এক রেখার লম্ব করিয়া নিষ্কাশন কর (১১২)

other, and the side FC, which is opposite to one of the equal angles in each, is common to both; therefore, the other sides are equal (26. 1.), each to each; that is, the perpendicular FH is equal to the perpendicular FK. In the same manner it may be demonstrated, that FL, FM, FG are each of them equal to FH or FK: therefore, the five straight lines FG, FH, FK, FL, FM are equal to one another; wherefore the circle described from the centre F, at the distance of one of these five, will pass through the extremities of the other four, and touch the straight lines AB, BC, CD, DE, EA, because the angles at the points G, H, K, L, M are right angles, and a straight line drawn from the extremity of the diameter of a circle at right angles to it touches (Cor. 16. 3.) the circle: therefore each of the straight lines AB, BC, CD, DE, EA touches the circle; wherefore the circle is inscribed in the pentagon ABCDE. Which was to be done.

*Sym. Dem.*  $\because BC = CD$ , and FC common to  $\Delta s$  BFC, DFC and  $\angle BCF = \angle DCF \therefore BF = FD$ , and  $\angle CBF = \angle CDF$ . Again  $\because \angle CDE = 2 \angle CDF$  and  $\angle CDE = \angle CBA$  and  $\angle CDF = \angle CBF \therefore \angle CBA = 2 \angle CBF \therefore \angle ABE = \angle CBF \therefore \angle ABC$  is bisected by BE. Similarly  $\angle s$  BAE, AED are bisected by AF, EF. Now  $\angle HCF = \angle KCF$  and  $\angle FHC = \angle FKC$  and FC common to  $\Delta s$  HFC, KFC  $\therefore$  (26. 1.) FH = FK. Similarly FL, FM, FG each = FH = FK  $\therefore$  the  $\odot$  described from F at the distance FH will pass through H, K, L, M, G and touch AB, BC, CD, DE, EA (Cor. 16. 3.)  $\therefore$  the  $\angle s$  at G, H, K, L, M, are  $\angle s$ .

জগচ কোন টগচ কোণের তুল্য এবং চজগ সমকোণ চটগ সম কোণের সমান একাংশ চজগ চটগ দুই ত্রিভুজের মধ্যে এক টীর দুই কোণ ক্রমশঃ অন্যটির দুই কোণের তুল্য এবং প্রত্যেকের সমানঃ কোণের সমুখস্থ চগ বাহু দুই ত্রিভুজের সামান্য কর্ণ অতএব অন্যান্য বাহুও ক্রমশঃ পরস্পর সমান (১১৬) অর্থাৎ চজ লম্ব চট লম্বের সমান । তদ্রূপ চঠ চড চছ প্রত্যেকে চজ অপন্য চট সমান উপপন্ন হইবে সুতরাং চছ চজ চট চঠ চড এই পাঁচ সরল রেখা পরস্পর সমান । অতএব চ কেন্দ্র হইতে ঐ পাঁচ রেখার কোন রেখার পরিমাণ দূরে বৃত্ত নিষ্কাশন করিলে তাহা সমুদয় পঞ্চ রেখার অগ্রে সংলগ্ন হইয়া কথ খগ গঘ ঘঙ ওক এই পাঁচ সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে কেননা চ জ ট ঠ ড বিন্দুস্থ কোন সম কোণ এবং বৃত্ত ব্যাসের অগ্র লইতে ব্যাসের লম্বপাত করিলে তাহা বৃত্ত স্পর্শ করে (৩১৬ অনুমান) সুতরাং কথ খগ গগ ঘঙ ওক প্রত্যেকে বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে এবং কথগঘঙ পঞ্চ ভুজ ক্ষেত্রে বৃত্ত অন্তর্গত হইয়াছে । ইহাই এতলে সম্পাদ্য ।

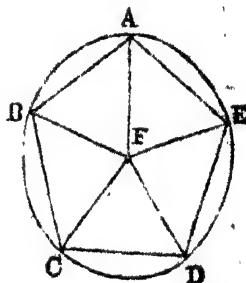
সং উ, ।  $\therefore$  খগ = গঘ, এবং চগ খচগ ঘচগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং  $\angle$  খগচ = ঘগচ,  $\therefore$  খচ = চঘ এবং গ  $\angle$  খচ =  $\angle$  গঘচ । পুনশ্চ  $\therefore$   $\angle$  গঘঙ =  $\angle$  গঘচ এবং গঘঙ = গখক ও গঘচ = গখচ,  $\therefore$  গখক =  $\angle$  গখচ,  $\therefore$  কখচ = গখচ,  $\therefore$   $\angle$  কখগ খচ বাহু দ্বারা দ্বিখণ্ডিত । তদ্রূপ খকঙ কঙঘ, কচ ওক দ্বারা ক্রমশঃ দ্বিখণ্ডিত । অপর  $\angle$  জগচ = টগচ এবং  $\angle$  চজগ =  $\angle$  চটগ এবং চগ জচগ টচগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু,  $\therefore$  (১১৬) চজ = চট । তদ্রূপ চঠ, চড, চছ প্রত্যেকে = চজ = চট,  $\therefore$  চ কেন্দ্র হইতে চজ পর্যন্ত অঙ্কিত ০ জ, ট, ঠ, ড, ছ দিয়া যাইবে এবং কথ, গ, গঘ, ঘঙ, ওক স্পর্শ করিবে (৩১৬ অনু)  $\therefore$  ছ, জ, ট, ঠ, চ কোন সম  $\angle$  ।

## PROP. XIV. PROB.

*To describe a circle about a given equilateral and equiangular Pentagon.*

Let  $ABCDE$  be the given equilateral and equiangular pentagon; it is required to describe a circle about it.

Bisect (9. 1.) the angles  $BCD$ ,  $CDE$  by the straight lines  $CF$ ,  $FD$ , and from the point  $F$ , in which they meet, draw the straight lines  $FB$ ,  $FA$ ,  $FE$  to the points  $B$ ,  $A$ ,  $E$ . It may be demonstrated, in the same manner as in the preceding proposition, that the angles  $CBA$ ,  $BAE$ ,  $AED$  are bisected by the straight lines  $FB$ ,  $FA$ ,  $FE$ : and because the angle  $BCD$  is equal to the angle  $CDE$ , and  $FCD$  is the half of the angle  $BCD$ , and  $CDF$  the half



of  $CDE$ ; the angle  $FCD$  is equal to  $FDC$ ; wherefore the side  $CF$  is equal (6. 1.) to the side  $FD$ : In like manner, it may be demonstrated, that  $FB$ ,  $FA$ ,  $FE$  are each of them equal to  $FC$  or  $FD$ : therefore the five straight lines,  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$ ,  $FD$ ,  $FE$  are equal to one another; and the circle described from the centre  $F$ , at the distance of one of them, will pass through the extremities of the other four, and be described about the equilateral and equiangular pentagon  $ABCDE$ . Which was to be done.

*Sym. Dem.* It may be shown as in the preceding proposition that  $\angle CBA$ ,  $BAE$ ,  $AED$  are bisected by  $FB$ ,  $FA$ ,  $FE$ . Now  $\therefore \angle BCD = \angle CDE$  and  $FCD = \frac{1}{2} \angle BCD$  and  $CDF = \frac{1}{2} \angle CDE \therefore \angle FCD = \angle FDC \therefore CF = FD$  (6. 1). Similarly  $FB$ ,  $FA$ ,  $FE$  each =

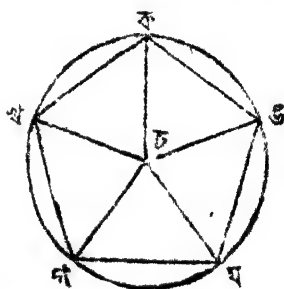
### ১৪ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

নির্দিষ্ট সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চ ভুজ কেন্দ্রোপরি-  
বৃত্ত নিষ্কাশ্য করিতে হইবে ।

কথগঘঙ নির্দিষ্ট সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ  
তাহার উপর এক বৃত্ত নিষ্কাশ্য করিতে হইবে ।

খগঘ গঘঙ দুই কোণ ক্রমশঃ গচ ঘচ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর  
এবং তাহারদের সম্পাত চিহ্ন চ হইতে চখ, চক, চঙ, রেখা খ, ক,

ঙ, পর্যাস্ত টান । পূর্ব প্রতিজ্ঞার  
ধারামুসারে উপপন্ন করা যায়  
যে গখক খকঙ কঙঘ কোণ  
সকল ক্রমশঃ চখ চক চঙ দ্বারা  
দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে । অপর খগঘ  
কোণ গঘঙ কোণের সমান এবং  
চগঘ কোণ খগঘ কোণের অর্দ্ধ  
আর গঘচ কোণ গঘঙ কোণের



অর্দ্ধ অতএব চগঘ কোণ গঘচ কোণের সমান সুতরাং  
চঘ বাহু চগ বাহুর তুল্য ( ১৬ ) তরুপ চখ চক চঙ প্রত্যেকে  
চগ অথবা চঘ রেখার তুল্য উপপন্ন হইবে সুতরাং চক চখ  
চগ চঘ চঙ এই পঞ্চ সরল রেখা পরস্পর সমান এবং চ কেন্দ্র  
হইতে তাহারদের কোনটির পরিমাণ দূরে বৃত্ত অঙ্কিত  
করিলে তাহা সমুদয় পঞ্চ রেখার অগ্রে সংলগ্ন হইয়া কথ-  
গঘঙ সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চ ভুজোপরি নিষ্কাশিত  
হইবে । ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য ।

সং উ, । পূর্ব প্রতিজ্ঞার ন্যায় উপপন্ন হইতে পারে যে  
গখক, খকঙ, কঙঘ ক্রমশঃ চখ, চক, চঙ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত ,  
অপর  $\therefore \angle \text{খগঘ} = \angle \text{গঘঙ}$  এবং  $\angle \text{চগঘ} = \frac{1}{2} \angle \text{খগঘ}$  এবং  $\angle \text{গঘচ}$   
 $= \frac{1}{2} \angle \text{গঘঙ} \therefore \angle \text{চগঘ} = \angle \text{চঘগ} \therefore \text{গচ} = \text{চঘ}$  ( ১৬ ) তরুপ চখ

$CF = FD \therefore$  the  $\odot$  described from  $F$  at the distance  $FC$  will pass through  $A, B, C, D, E$ .

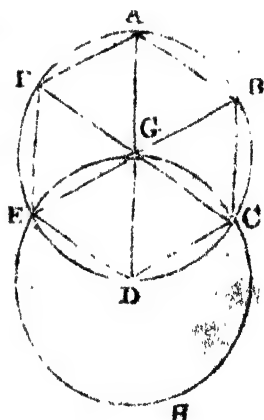
### PROP. XV. PROB.

*To inscribe an equilateral and equiangular hexagon in a given circle.*

Let  $ABCDEF$  be the given circle; it is required to inscribe an equilateral and equiangular hexagon in it.

Find the centre  $G$  of the circle  $ABCDEF$ , and draw the diameter  $AGD$ ; and from  $D$  as a centre, at the distance  $DG$ , describe the circle  $EGCH$ , join  $EG, CG$ , and produce them to the points  $B, F$ ; and join  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ : the hexagon  $ABCDEF$  is equilateral and equiangular.

Because  $G$  is the centre of the circle  $ABCDEF$ ,  $GE$  is equal to  $GD$ : and because  $D$  is the centre of the circle  $EGCH$ ,  $DE$  is equal to  $DG$ ; wherefore  $GE$  is equal to  $ED$ , and the triangle  $EGD$  is equilateral; and therefore its three angles  $EGD, GDE, DEG$ , are equal to one another (Cor. 5. 1.): and the three angles of a triangle are equal (32. 1.) to two right angles; therefore the angle  $EGD$  is the third part of two right angles: in the same manner, it may be demonstrated, that the angle  $DGC$  is also the third part of two right



angles: and because the straight line  $GC$  makes with  $EB$  the adjacent angles  $EGC, CGB$  equal (13. 1.) to two right angles: the remaining angle  $CGB$  is the third part of two right angles: therefore the angles  $EGD, DGC, CGB$ , are equal to one another: and also the angles vertical to them,  $BGA, AGF, FGE$

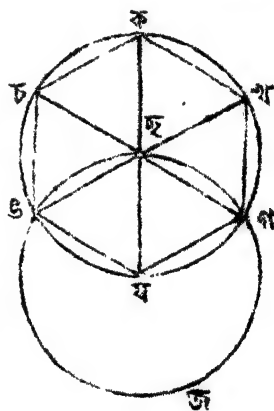
চক, চঙ, প্রত্যেকে = গচ = চঘ : চ কেন্দ্র হইতে চগ পর্য্যন্ত অঙ্কিত ৩ ক, খ, গ, ঘ, ঙ দিয়া যাইবে ।

### ১৫ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

নির্দিষ্ট বৃত্তে সমবাহক এবং সমান কোণি ষড়্ভুজ কেন্দ্র অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কখগঘঙচ নির্দিষ্ট বৃত্ত, তন্মধ্যে এক সমবাহক এবং সমান কোণি ষড়্ভুজ কেন্দ্র অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কখগঘঙচ বৃত্তের ছ কেন্দ্র নির্দেশ করিয়া কচঘ বাস অঙ্কিত কর পরে ঘ কেন্দ্র হইতে ঘঙ চক চঙগ বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং ওছ গছ সংযুক্ত করিয়া তাহারদিককে খ এবং চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর আর কখ খগ গঘ ঘঙ ওচ চক সংযুক্ত কর । তাহাতে কখগঘঙচ ষড়্ভুজ সম বাহক এবং সমানকোণি হইবে ।



ছ বিন্দু কখগঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র একারণ ছঙ ছঘ সমান এবং ঘ বিন্দু ছঙগ বৃত্তের কেন্দ্র একারণ ঘঙ ছঘ সমান অতএব চঙ ওঘ সমান এবং ওছঘ ত্রিভুজ

সমবাহক উপপন্ন হইল তন্নিমিত্তে ঐ ত্রিভুজস্থ তিন কোণ ওছঘ ছঘঙ ঘঙছ পরস্পর সমান (১৫ অনুমান) । অপর ত্রিভুজস্থ তিন কোণ একত্র যোগে ছই সমকোণ তুল্য হয় (১৩২) অতএব ওছঘ ছই সমকোণের তৃতীয়াংশ । তদ্রূপ ঘঙগ কোণ ছই সমকোণের তৃতীয়াংশ উপপন্ন হইবে । অপর ওঘ রেখাপরি ছগ রেখার সম্পাতে উভয় পার্শ্ব ছ ছই কোণ ওছগ এবং গছখ একত্র যোগে ছই সম কোণ তুল্য (১১৩) । একারণ



(15. 1.); therefore the six angles  $EGD$ ,  $DGC$ ,  $CGB$ ,  $BGA$ ,  $AGF$ ,  $FGE$  are equal to one another. But equal angles at the centre stand upon equal (26. 3.) arches; therefore the six arches  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FA$  are equal to one another; and equal arches are subtended by equal (29. 3.) straight lines; therefore the six straight lines are equal to one another, and the hexagon  $ABCDEF$  is equilateral. It is also equiangular; for, since the arch  $AF$  is equal to  $ED$ , to each of these add the arch  $ABCD$ ; therefore the whole arch  $FABCD$  shall be equal to the  $EDCBA$ : and the angle  $FED$  stands upon the arch  $FABCD$ , and the angle  $AFE$  upon  $EDCBA$ ; therefore the angle  $AFE$  is equal to  $FED$ : in the same manner it may be demonstrated, that the other angles of the hexagon  $ABCDEF$  are each of them equal to the angle  $AFE$  or  $FED$ ; therefore the hexagon is equiangular; it is also equilateral, as was shewn: and it is inscribed in the given circle  $ABCDEF$ . *Which was to be done.*

Cor. From this it is manifest, that the side of the hexagon is equal to the straight line from the centre, that is, to the radius of the circle.

And if through the points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , there be drawn straight lines touching the circle, an equilateral and equiangular hexagon shall be described about it, which may be demonstrated from what has been said of the pentagon: and likewise a circle may be inscribed in a given equilateral and equiangular hexagon, and circumscribed about it, by a method like to that used for the pentagon.

*Sym. Dem.*  $GE = GD$  and  $DE = DG \therefore GE = DE \therefore \triangle EGD$  is equilateral  $\therefore \angle EGD = GDE = DEG$  (Cor. 5. 1.)  $\therefore \angle EGD = \frac{1}{2}$  of 2 rt.  $\angle$ s (12. 1.) Similarly  $DGC = \frac{1}{2}$  of 2 rt.  $\angle$ s  $\therefore \angle CGB = \frac{1}{2}$  of 2 rt.  $\angle$ s (13. 1.)  $\therefore \angle EGD = DGC = CGB = (15. 1.) BGA = AGF = FGE \therefore$  the arcs  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FA$  are equal to one

অবশিষ্ট গহ্বৰ কোণও দুই সমকোণের তৃতীয়াংশ অতএব  
 ওছয ঘছগ এবং গহ্বৰ এই তিন কোণ পরস্পর সমান এবং  
 তাহারদের সম্মুখস্থ কছখ কছচ চছও কোণও তত্তুল্য (১।১৫)  
 সুতরাং ওছয ঘছগ গহ্বৰ খছক কছচ চছও এই ছয় কোণ  
 পরস্পর সমান। অধিকন্তু কেন্দ্রস্থ সমান২ কোণ সমান২  
 চাপের উপর থাকে (৩.২৬) অতএব কখ খগ গঘ ঘঙ ওচ  
 চক এই ছয় চাপ পরস্পর সমান এবং সমান২ চাপের সম্মুখস্থ  
 সরল রেখাও সমান হওয়াতে (৩.২৯) কখ প্রভৃতি ছয়  
 সরল রেখা পরস্পর সমান সুতরাং কখগঘঙচ ঘড়ভুজ সম-  
 বাহুক উপপন্ন হইল। অপর তাহা সমান কোণিও বটে  
 কেননা কচ ওঘ দুই চাপ সমান হওয়াতে তাহারদের প্রত্যেকে  
 কখগঘ চাপ যোগ করিলে সমুদয় চকখগঘ চাপ কখগঘঙ  
 চাপ তুল্য হইবে অপর চওঘ কোণ চকখগঘ চাপোপরিস্থ  
 এবং কচও কোণ কখগঘঙ চাপোপরিস্থ অতএব চওঘ কোণ  
 কচও সমান। তদ্রূপ ঐ ঘড়ভুজ কেন্দ্রের অন্যান্য কোণ চওঘ  
 অথবা কচও কোণ সমান উপপন্ন হইবে সুতরাং ঐ ঘড়ভুজ  
 ক্ষেত্র সমান কোণি। পূর্বে তাহা সমবাহুকও উপপন্ন হই-  
 যাচ্ছে এবং তাহা কখগঘঙচ বৃত্তে অন্তর্গত হইয়াছে। ইহাই  
 প্রস্তাবে সম্পাদ্য।

সং উ,। ছঙ=ছয এবং ঘঙ=ঘছঃ ছঙ=ঘঙঃ।  $\Delta$  ওছয  
 সমবাহুকঃ.  $< ওছয = ছযঙ = ঘঙছ$  (১।৫ অনু)  $\therefore ওছয = ২$   
 সমকোণের তৃতীয়াংশ (১।৩২) তদ্রূপ ঘছগ = ২ সমকোণের  
 তৃতীয়াংশঃ.  $< গহ্বৰ = ২$  সমকোণের তৃতীয়াংশ (১।১৩)  $\therefore <$   
 $ওছয = ঘছগ = গহ্বৰ = (১।১৫)$   $খছক = কছচ = চছও$ ঃ কখ,  
 খগ, গঘ, ঘঙ, ওচ, চক ছয় চাপ সমানঃ. কখ, খগ, গঘ,  
 ঘঙ, ওচ, চক ছয় সরল রেখাও পরস্পর সমান (৩।২৯)ঃ. কখ-  
 গঘঙচ ঘড়ভুজ সমবাহুক। পুনশ্চঃ কচ চাপ = ওঘ,ঃ চক-  
 খগঘ চাপ = ওঘগখক চাপঃ.  $< কচঙ = < চওঘ$  (৩।২৭)

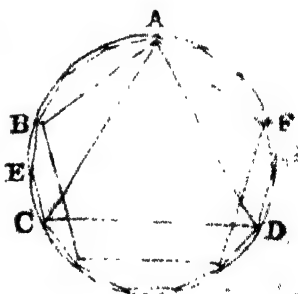
another (26. 3.)  $\therefore$  the straight lines AB, BC, CD, DE, EF, FA are equal to one another (29. 3.)  $\therefore$  hexag. ABCDEF is equilateral. Again  $\because$  arc AF = ED, the whole arc FABCD = arc EDCBA  $\therefore$   $\angle$  AFE =  $\angle$  FED (27. 3.) Similarly the other  $\angle$ s of Hexag. ABCDEF each = AFE or FED  $\therefore$  Hexag. ABCDEF is equiangular.

### PROP. XVI. PROB.

*To inscribe an equilateral and equiangular quindecagon in a given circle.*

Let ABCD be the given circle; it is required to inscribe an equilateral and equiangular quindecagon in the circle ABCD.

Let AC be the side of an equilateral triangle inscribed (2. 4.) in the circle, and AB the side of an equilateral and equiangular pentagon inscribed (11. 4.) in the same; therefore, of such equal parts as the whole circumference ABCDF contains fifteen, the arch ABC, being the third part of the whole, contains five; and the arch AB, which is the fifth part of



the whole, contains three; therefore BC their difference contains two of the same parts, bisect (30. 3.) BC in E; therefore BE, EC are each of them the fifteenth part of the whole circumference ABCDE: therefore if the straight lines BE, EC be drawn, and straight lines equal to them be placed (1. 4.) around in the whole circle, an equilateral and equiangular quindecagon will be inscribed in it. Which was to be done.

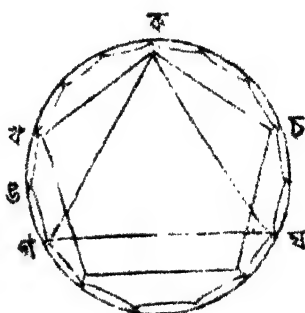
একত্রুপ কখগঘঙচ বড়তুজের অন্যান্য কোণ প্রত্যেকে = কচঙ  
 অথবা চঙঘ : কখগঘঙচ বড়তুজ সমান কোণি ।

### ১৬ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

নির্দিষ্ট বৃত্তে সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ তুজ  
 ক্ষেত্র অন্তর্গত করিতে হইবে

যেখান নির্দিষ্ট বৃত্ত তন্মধ্যে  
 সমবাহুক এবং সমান কোণি  
 পঞ্চদশ তুজ ক্ষেত্র অন্ত-  
 র্গত করিতে হইবে ।

নির্দিষ্ট বৃত্তান্তর্গত এক  
 সমবাহুক ত্রিভুজ হউক  
 (৪:২) কখ তাহার এক বাহু,  
 এবং সমবাহুক ও সমান  
 কোণি পঞ্চতুজ ক্ষেত্রও



তাছাড়া অন্তর্গত হউক (৪:১১) কখ তাহার এক বাহু । কখগ  
 চাপ পরিধির তৃতীয়াংশ এবং কখ পঞ্চমাংশ অতএব কখগ-  
 ঘচ সমুদয় পরিধি সমান করিয়া পঞ্চদশ ভাগে বিভক্ত হইলে  
 কখগ তাহার পঞ্চ ভাগ এবং কখ তাহার তিন ভাগ ধারণ  
 করিবে সুতরাং কখগ হইতে কখ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট  
 খগ চাপ দুই ভাগ ধারণ করিবে । খগ চাপ ও বিন্দুতে  
 বিধিও (৩:৩০) তাছাড়া খঙ ওগ প্রত্যেকে কখগঘ  
 পরিধির পঞ্চদশাংশ হইবে এবং খঙ ওগ দুই সরল রেখা  
 টানিয়া তন্তুলা রেখা সমুদয় পরিধি ব্যাপিয়া (৪:১) বৃত্ত  
 মধ্যে স্থাপিত করিলে এক সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ  
 তুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত হইবে । ইহাই এখানে সম্পাদ্য ।

And, in the same manner, as was done in the pentagon, it through the points of division made by inscribing the quindecagon, straight lines be drawn touching the circle, an equilateral and equiangular quindecagon may be described about it : And likewise, as in the pentagon, a circle may be inscribed in a given equilateral and equiangular quindecagon, and circumscribed about it.

*Sym. Dem.* Arc  $ABC = \frac{1}{15} \odot ABCDEF$  and arc  $AB = \frac{1}{15} \odot ABCDEF \therefore ABC = AB$  or arc  $BC = \frac{1}{15} \odot ABCDEF \therefore$  arc  $EB = \frac{1}{15} \odot ABCDEF \therefore$  by joining  $EB$  and placing straight lines equal to it around in the whole  $\odot$  an equilateral and equiangular quindecagon will be inscribed in the  $\odot$

---

অপর পঞ্চদশ ভুক্ত ক্ষেত্র অন্তর্গত করণে পরিধি যেহ  
বিন্দুতে ছিল হইয়াছে পঞ্চভুক্ত ক্ষেত্র অঙ্কিত করিবার পূর্বোক্ত  
ধারান্তসারে সেই সকল ছেদ চিত্র বৃত্তস্পর্শক রেখা টানিলে  
সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ ভুক্ত ক্ষেত্র বৃত্তোপরি  
নিক্ষিপ্য হইবে। অপিচ পঞ্চভুক্ত ক্ষেত্রের ধারান্তসারে পঞ্চদশ  
ভুক্ত ক্ষেত্রে বৃত্ত অন্তর্গত এবং নিক্ষিপ্য করা শাইতে পারে।

সং উ। কথং চাপ =  $\frac{1}{2}$  কথং ঘট এবং কথং চাপ =  $\frac{1}{2}$  ○  
কথং ঘট ∴ কথং—কথং অর্থাৎ খং চাপ =  $\frac{1}{2}$  ○ কথং ঘট ∴  
ওখ চাপ =  $\frac{1}{2}$  ○ কথং ঘট ∴ ওখ সংযুক্ত করিয়া ততুল্য  
রেখা পরিধি ব্যাপিয়া স্থাপন করিলে সমবাহক এবং সমান  
কোণি পঞ্চদশ ভুক্ত বৃত্তান্তর্গত হইবে।

চতুর্থাদ্যায়ঃ সমাপ্তঃ।



## BOOK V\*.

IN the demonstrations of this book there are certain *signs or characters* which it has been found convenient to employ.

“ 1. The letters  $A, B, C$ , &c. are used to denote magnitudes of any kind. The letters  $m, n, p, q$ , are used to denote numbers only.

“ 2. The sign  $+$  (*plus*,) written between two letters, that denote magnitudes, or numbers, signifies the sum of those magnitudes or numbers. Thus,  $A + B$  is the sum of the two magnitudes denoted by the letters  $A$  and  $B$ ;  $m + n$  is the sum of the numbers denoted by  $m$  and  $n$ .

“ 3. The sign  $-$  (*minus*,) written between two letters, signifies the excess of the magnitude denoted by the first of these letters, which is supposed the greatest, above that which is denoted by the other. Thus,  $A - B$  signifies the excess of the magnitude  $A$  above the magnitude  $B$ .

“ 4. When a number, or a letter denoting a number, is written close to another letter denoting a magnitude of any kind, it signifies that the magnitude is multiplied by the number. Thus  $3 A$  signifies three times  $A$ ;  $m B$ ,  $m$  times  $B$ , or a multiple of  $B$  by  $m$ . When the number is intended to multiply two or more magnitudes that follow, it is written thus,  $m (A + B)$ .

---

\* The propositions of the 6th and 5th books are most of them symbolically demonstrated, in whole or in part, in the text. No other demonstrations of the same sort are therefore added.

## ৫ অধ্যায়\* ।

এই অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞা সকল সহজে উপপন্ন করিবার নিমিত্ত কতিপয় চিহ্ন অথবা অক্ষর প্রয়োগ করা গেল ।

১ “ক, খ, গ ইত্যাদি অক্ষরে সৰ্বজাতীয় রাশি বুঝাইবেক কিন্তু অ ই উ ঋ প্রভৃতি অক্ষর কেবল সংখ্যা বাচক হয়, ।

২ “+ এই চিহ্নের নাম ধন । কোন রাশি অথবা সংখ্যাত্মক অঙ্ক বাচক অক্ষরের মধ্যে ঐ চিহ্ন থাকিলে ঐ রাশি অথবা অঙ্কের সম্বলন বুঝায় । যথা ক+খ, ইহার তাৎপর্য্য ক এবং খ অক্ষরে ব্যক্ত দুই রাশির যোগ, তথা অ+ই ইহার তাৎপর্য্য অ এবং ই অঙ্কের যোগ ।

৩ “—এই চিহ্নের নাম ঋণ । দুই অক্ষরের মধ্যস্থলে ঐ চিহ্ন থাকিলে প্রথম অক্ষরোক্ত বৃহত্তর রূপে কল্পিত রাশি হইতে দ্বিতীয়োক্তের ব্যবকলন বুঝায় । যথা ক—খ, ইহার তাৎপর্য্য ক রাশি হইতে খ রাশির অন্তর অর্থাৎ বিয়োগাবশিষ্ট ।

৪ “কোন অঙ্ক অথবা অঙ্ক বাচক কোন অক্ষর কোন রাশির অব্যবহিত নিকটে লিখিত হইলে তাহার অর্থ এই যে ঐ রাশি ঐ অঙ্ক দ্বারা গুণিত হইয়াছে যথা ৩ক অর্থাৎ ক রাশির ত্রিগুণ । অথ অর্থাৎ অ গুণ খ অথবা অ পরিমাণ খ রাশির অপবর্ত্য । উত্তরঃ দুই কিবা অধিক রাশির গুণক ব্যক্ত করিতে হইলে এই প্রকার লিখিতে হয় যথা অ (ক+খ) ইহার তাৎপর্য্য, ক এবং খ রাশির যোগ অ পরিমাণে গুণিত ।

\* পঞ্চম এবং ষষ্ঠ অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞার অধিকাংশ সহজে উপপন্ন হইয়াছে একারণ উক্ত দুই অধ্যায় আর কোন উপপত্তি যোগ করা যেন না ।



" which signifies the sum of A and B taken  $m$  times  
 "  $m(A-B)$  is  $m$  times the excess of A above B.

" Also, when two letters that denote numbers are written close to one another, they denote the product of those numbers when multiplied into one another.  
 " Thus,  $mn$  is the product of  $n$  into  $m$ ; and  $mnA$  is A multiplied by the product of  $n$  into  $m$ .

" 5. The sign  $=$  signifies the equality of the magnitudes denoted by the letters that stand on the opposite sides of it;  $A = B$  signifies that A is equal to B;  
 "  $A + B = C - D$  signifies that the sum of A and B is equal to the excess of C above D.

" 6. The sign  $>$  is used to signify that the magnitudes between which it is placed are unequal, and that the magnitude to which the opening of the lines is turned is greater than the other. Thus  $A > B$  signifies that A is greater than B; and  $A < B$  signifies that A is less than B."

#### DEFINITIONS.

I. A less magnitude is said to be a *part* of a greater magnitude, when the less measures the greater, that is, when the less is contained a certain number of times exactly in the greater.

II. A greater magnitude is said to be a *multiple* of a less, when the greater is measured by the less, that is, when the greater contains the less a certain number of times exactly.

III. *Ratio* is a mutual relation of two magnitudes, of the same kind, to one another in respect of quantity.

IV. Magnitudes are said to be of the *same kind*, when the less can be multiplied so as to exceed the greater, and it is only such magnitudes that are said to have a ratio to one another.

V. If there be four magnitudes, and if any equimultiples whatsoever be taken of the first and third, and

তথা অ (ক—খ) ইহার তাৎপর্য, ক এবং খ রাশির অন্তর অ পরিমাণে গুণিত।

“অপিচ দুই সংখ্যাত্মক অঙ্ক বাচক অক্ষর পরস্পরের সম্বন্ধে লিখিত হইলে তাহাতে ঐ দুই অক্ষরের গুণিত ফল ব্যক্ত হয় যথা অই অর্থাৎ অ এবং ই অক্ষরের গুণিত ফল। তথা অইক অর্থাৎ অ এবং ই অক্ষরের গুণিত ফলে ক রাশির গুণন।

৫ “—এই চিহ্ন যে অক্ষরের মধ্যস্থলে থাকে তদ্বাচ্য রাশির তুল্যতা ব্যক্ত হয় যথা ক=খ অর্থাৎ ক খ সমান। তথা ক+খ =গ—ঘ অর্থাৎ ক এবং খ যোগে গ হইতে ঘ বিয়োগাবশিষ্ট সমান হয়।

৬ “—এই চিহ্নের অর্থ যে দুই পার্শ্বস্থ রাশি পরস্পর সমান নহে এবং যেদিকে ঐ চিহ্নের মুখ অনাবত থাকে তদ্বিক্ত রাশি অন্য দিকস্থ রাশির অতিরিক্ত। যথা ক > খ ইহার তাৎপর্য যে ক খ হইতে অতিরিক্ত। তথা ক < খ ইহার তাৎপর্য যে ক খ হইতে স্থান”।

### সংজ্ঞা ।

১। ক্ষুদ্রতর রাশি বৃহত্তরের অপবর্তন হইলে অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর কিয়ৎ সংখ্যক পরিমাণে বৃহত্তরে ব্যাপ্ত হইলে ক্ষুদ্রতরকে বৃহত্তরের অংশ কহা যায়।

২। বৃহত্তর রাশি ক্ষুদ্রতর দ্বারা পরিমেয় হইলে অর্থাৎ কিয়ৎ সংখ্যক পরিমাণে ক্ষুদ্রতরের ব্যাপক অথবা ভাজ্য হইলে বৃহত্তরকে ক্ষুদ্রতরের অপবর্ত্য কহা যায়।

৩। সমভীত দুই রাশির মধ্যে পরস্পরের পরিমাণ বিষয়ে যে ভারতম্য সম্বন্ধ থাকে তাহাকে নিম্পত্তি কহা যায়।

৪। দুই রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতরের গুণন বৃহত্তরের অধিক ফল প্রাপ্তি সম্ভাব্য হইলে তাহারদ্বিককে সমভীত কহা যায় এবং কেবল তাদৃশ রাশির মধ্যেই নিম্পত্তি সম্বন্ধ থাকিতে পারে।

any equimultiples whatsoever of the second and fourth; and if, according as the multiple of the first is greater than the multiple of the second, equal to it, or less, the multiple of the third is also greater than the multiple of the fourth, equal to it, or less; then the first of the magnitudes is said to have to the second the same ratio that the third has to the fourth.

VI. Magnitudes are said to be *proportionals*, when the first has the same ratio to the second that the third has to the fourth; and the third to the fourth the same ratio which the fifth has to the sixth, and so on, whatever be their number.

" When four magnitudes, A, B, C, D are proportionals, it is usual to say that A is to B as C to D, and to write them thus,  $A : B :: C : D$ , or thus,  $A : B = C : D$ ."

VII. When of the equimultiples of four magnitudes, taken as in the definition, the multiple of the first is greater than that of the second, but the multiple of the third is not greater than the multiple of the fourth; then the first is said to have to the second a *greater ratio* than the third magnitude has to the fourth; and, on the contrary, the third is said to have to the fourth a *less ratio* than the first has to the second.

VIII. When there is any number of magnitudes greater than two, of which the first has to the second the same ratio that the second has to the third, and the second to the third the same ratio which the third has

৫। চারি রাশির মধ্যে প্রথম এবং তৃতীয়ের সম অপবর্ত্য কোন অঙ্ক এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের সম অপবর্ত্য কোন অঙ্ক কল্পনা করিলে এবং প্রথম রাশির অপবর্ত্য দ্বিতীয় রাশির অপবর্ত্যের সমাতিরিক্ত কিম্বা স্থান হইলে যদি তৃতীয় রাশির অপবর্ত্য চতুর্থ রাশির অপবর্ত্যের তদ্রূপ সমাতিরিক্ত কিম্বা স্থান হয় তবে প্রথম ও দ্বিতীয়ের নিষ্পত্তি পরিমাণকে তৃতীয় এবং চতুর্থের নিষ্পত্তি পরিমাণের সমান কহা যায় ।

৬। কতিপয় রাশির মধ্যে প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ তাহা তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণ তুল্য হইলে এবং তৃতীয়ের চতুর্থ সহিত যে নিষ্পত্তি তাহা পঞ্চমের ষষ্ঠ সহিত নিষ্পত্তির তুল্য হইলে আর অবশিষ্ট বত রাশি থাকে সকলের ক্রমশঃ তদ্রূপ পরিমাণে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ থাকিলে রাশি সকলকে অমুপাতীয় কহা যায় ।

“চারি রাশি (যথা ক খ গ ঘ) অমুপাতীয় হইলে এইরূপ উক্তি করিবার রীতি আছে, ক যথা খ সম্বন্ধে গ তথা ঘ সম্বন্ধে এবং তাহা লিখিবার সংক্ষেপ এই যথা ক : খ :: গ : ঘ অথবা ক . খ = গ : ঘ” ।

৭। পঞ্চম সংজ্ঞানুযায়ি চারি রাশির সম অপবর্ত্য কল্পন করিলে প্রথম রাশির অপবর্ত্য যদি দ্বিতীয়ের অধিক এবং তৃতীয়ের অপবর্ত্য যদি চতুর্থের অনধিক হয় তবে প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণকে তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণের অধিক কহা যায়, এবং তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তিকে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির স্থান কহা যায় ।

৮। তিন কিম্বা অধিক রাশির মধ্যে প্রথম রাশির যদি দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি দ্বিতীয়ের তৃতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় এবং দ্বিতীয়ের যদি তৃতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় এবং এরূপ তুল্য পরিমাণ

to the fourth, and so on, the magnitudes are said to be *continual proportionals*.

IX. When three magnitudes are continual proportionals, the second is said to be a *mean proportional* between the other two.

X. When there is any number of magnitudes of the same kind, the first is said to have to the last the ratio *compounded* of the ratio which the second has to the third, and of the ratio which the third has to the fourth, and so on unto the last magnitude.

For example, if A, B, C, D be four magnitudes of the same kind, the first A is said to have to the last D, the ratio compounded of the ratio of A to B, and of the ratio of B to C, and of the ratio of C to D; or the ratio of A to D is said to be compounded of the ratios of A to B, B to C, and C to D.

And if  $A : B :: E : F$ ; and  $B : C :: G : H$ ; and  $C : D :: K : L$ , then, since by this definition, A has to D the ratio compounded of the ratios of A to B, B to C, C to D: A may also be said to have D the ratio compounded of the ratios which are the same with the ratio of E to F, G to H, and K to L.

In like manner, the same things being supposed, if M has to N the same ratio which A has to D, then, for shortness' sake, M is said to have to N a ratio compounded of the same ratios, which compound the ratio of A to D; that is, a ratio compounded of the ratios of E to F, G to H, and K to L.

যদি ক্রমশঃ সমুদয় রাশিতে বর্ত্তে তবে সে সকল রাশিকে অবিরত অমুপাতীয় কহা যায়।

৯। তিন রাশি অবিরত অমুপাতীয় হইলে দ্বিতীয় রাশিকে অর্বা দুয়ের “মধ্য অমুপাতীয়” কহা যায়।

১০। সজ্জাতীয় কতিপয় রাশি থাকিলে প্রথম রাশির শেষ রাশি সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ তাহাকে প্রথমের দ্বিতীয় সহিত, দ্বিতীয়ের তৃতীয় সহিত, তৃতীয়ের চতুর্থ সহিত, এবং ক্রমশঃ শেষ পর্য্যন্ত যত সম্বন্ধ সম্ভাব্য সকলের যোগ নিষ্পত্তি কহা যায়।

উদাহরণ। যদি ক খ গ ঘ সজ্জাতীয় চারি রাশি কল্পিত হয় তবে ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহাকে ক রাশির খ সম্বন্ধীয়, খ রাশির গ সম্বন্ধীয়, গ রাশির ঘ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির যোগ কহা যায় অর্থাৎ ঘ সম্বন্ধে ক রাশির যে নিষ্পত্তি তাহা খ সম্বন্ধে ক রাশির, গ সম্বন্ধে খ রাশির, ঘ সম্বন্ধে গ রাশির নিষ্পত্তির যোগ তুল্য।

অপিচ যদি ক : খ :: উ : চ এবং খ : গ :: ছ : জ এবং গ : ঘ :: ঞ : তেবে এই সংজ্ঞানুসারে ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক রাশির খ সম্বন্ধীয়, খ রাশির গ সম্বন্ধীয়, গ রাশির ঘ সম্বন্ধীয়, নিষ্পত্তির সংযোগ তুল্য হওয়াতে এমত কহা যাইতে পারে যে ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা উ রাশির চ সম্বন্ধীয়, ছ রাশির জ সম্বন্ধীয়, এবং ক রাশির ঞ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির যোগ তুল্য।

তথা পূর্ব্ববৎ কল্পনা করিলে ট রাশির ঠ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি যদি ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে সংক্ষেপে কহা যাইতে পারে যে ট রাশির ঠ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির ন্যায় বোঝাওঁপম অর্থাৎ তাহা উ রাশির চ সম্বন্ধীয় ছ রাশির জ সম্বন্ধীয় এবং ক রাশির ঞ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সংযোগ উৎপন্ন হইয়াছে।

XI. If three magnitudes are continual proportionals, the ratio of the first to the third is said to be *duplicate* of the ratio of the first to the second.

"Thus, if A be to B as B to C, the ratio of A to C is said to be *duplicate* of the ratio of A to B. Hence, "since by the last definition, the ratio of A to C is "compounded of the ratios of A to B, and B to C, a "ratio, which is compounded of two equal ratios, is "duplicate of either of these ratios."

XII. If four magnitudes are continual proportionals, the ratio of the first to the fourth is said to be *triplicate* of the ratio of the first to the second, or of the ratio of the second to the third, &c.

"So also, if there are five continual proportionals; the "ratio of the first to the fifth is called *quadruplicate* of "the ratio of the first to the second, and so on, according to the number of ratios. Hence, a ratio compounded of three equal ratios is *triplicate* of any one of those ratios; a ratio compounded of four equal ratios *quadruplicate*," &c.

XIII In proportionals, the antecedent terms of the "ratios are said to be *homologous* to one another, and the consequents of the ratios are said to be *homologous* to one another.

Geometers make use of the following technical words to signify certain ways of changing either the order or magnitude of proportionals, so as that they continue still to be proportionals.

XIV. *Permutando*, or *alternando*, by permutation, or *alternately*; this word is used when there are four

## ক্ষেত্রতত্ত্ব।

১১ তিন রাশি অবিবত অষ্টপাতীয় হইলে প্রথমের তৃতীয় সঙ্খ্যায় নিষ্পত্তিকে প্রথমের দ্বিতীয় সঙ্খ্যায় নিষ্পত্তির দ্বিঘাত করা যায়।

উদাহরণ। যদি ক যথা খ সঙ্খ্যে খ তথা গ সঙ্খ্যে কল্পিত হয় তবে ক রাশির গ সঙ্খ্যায় নিষ্পত্তিকে ক রাশির খ সঙ্খ্যায় নিষ্পত্তি ব দ্বিঘাত করা যায়। অতএব পূর্বোক্ত সংজ্ঞানুসারে ক রাশির গ সঙ্খ্যায় নিষ্পত্তি ক রাশির খ সঙ্খ্যায় এবং খ রাশির গ সঙ্খ্যায় নিষ্পত্তির যোগোৎপন্ন হওয়াতে নিশ্চিত হইতেছে যে দুই সমান নিষ্পত্তির যোগোৎপন্ন নিষ্পত্তি এক নিষ্পত্তির দ্বিঘাত হইবে।

১২ চারি রাশি যদি অবিবত অষ্টপাতীয় হয় তবে চতুর্থ সহিত প্রথমের নিষ্পত্তি সঙ্খ্যাক দ্বিতীয় সহিত প্রথমের অথবা তৃতীয় সহিঃ দ্বিতীয়েব নিষ্পত্তির ত্রিঘাত করা যায়।

“তদ্রূপ পঞ্চ রাশি অবিবত অষ্টপাতীয় হইলে পঞ্চমের সঙ্খ্যে প্রথমের নিষ্পত্তিকে তৃতীয়েব সঙ্খ্যে প্রথমের নিষ্পত্তির চতুর্ঘাত করা যায়। ততোধিক রাশি থাকিলেও ক্রমশঃ ঐ রূপ হইবে। অতএব তিন সমানঃ নিষ্পত্তিব বোধে যে নিষ্পত্তি উৎপন্ন হয় তাহাকে ঐ ২ নিষ্পত্তির ত্র্যন্ত্যেকের দ্বিঘাত এবং চারি সমানঃ নিষ্পত্তির বোধে যে নিষ্পত্তি উৎপন্ন হয় তাহাকে চতুর্ঘাত করা যায়”।

১৩ অষ্টপাতীয় রাশির মধ্যে অগ্রবর্তী গণকে পরোত্তর সঙ্খ্যায় করা যায়, পশ্চাদ্বর্তী গণেরও ঐ পরিভাষা।

অষ্টপাতীয় রাশির নিষ্পত্তি সঙ্খ্যেয় ব্যতিক্রম না করিয়া সাধারণের প্রার্থী অথবা পরিমাণ অন্যরূপ করিবার যে ২ ধারা আছে ক্ষেত্রতত্ত্ববিৎ পণ্ডিতেরা তদ্বিষয়ে নিম্ন সিদ্ধিত পরিভাষার প্রয়োগ করেন।

১৪ বিনিময় নিষ্পত্তি। চারি অষ্টপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমত অষ্টমের হয় যে প্রথমের তৃতীয় সঙ্খ্যে যে নিষ্পত্তি



proportionals, and it is inferred, that the first has the same ratio to the third which the second has to the fourth, or that the first is to the third as the second to the fourth: See Prop. 16, of this Book

**XV. *Invertendo by Inversion***: When there are four proportionals, and it is inferred, that the second is to the first as the fourth to the third. Prop. A. Book 5

**XVI. *Componendo, by composition*** When there are four proportionals, and it is inferred, that the first, together with the second, is to the second as the third together with the fourth, is to the fourth. 18th Prop. Book 5

**XVII. *Dividendo by division*** When there are four proportionals, and it is inferred, that the excess of the first above the second, is to the second, as the excess of the third above the fourth, is to the fourth. 17th Prop. Book 5

**XVIII. *Convertendo by conversion***. When there are four proportionals, and it is inferred, that the first is to its excess above the second, as the third to its excess above the fourth. Prop. D. Book 5

**XIX. *Ex aequali, (sc. distantia,) or, ex æquo, from equality of distance***, when there is any number of magnitudes more than two, and as many others, so that they are proportionals when taken two and two of

দ্বিতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি, তবে “বিনিময় নিষ্পত্তি” পরিভাষা প্রয়োগ হয়। এই অধ্যায়ের ১৬ প্রতিজ্ঞাতে দৃষ্টিপাত কর।

১৫ বিলোম নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমনত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয়ের প্রথম সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি চতুর্থের তৃতীয় সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি, তবে উক্ত পরিভাষার ব্যবহার হয়। ৫ অধ্যায় ৫ প্রতিজ্ঞা।

১৬ যোগ নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমনত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয় সম্বন্ধে প্রথম এবং দ্বিতীয়ের যোগোৎপন্ন রাশির যে নিষ্পত্তি চতুর্থ সম্বন্ধে তৃতীয় এবং চতুর্থের যোগোৎপন্ন রাশির সেই নিষ্পত্তি, তবে এই পরিভাষার প্রয়োগ হয়। ৫ অধ্যায় ১৮ প্রতিজ্ঞা।

১৭ অন্তর নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমনত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয়কে প্রথম হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্ট রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি চতুর্থকে তৃতীয় হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্ট রাশিরও চতুর্থ সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি তবে উক্ত পারিভাষিক শব্দ প্রয়োগ হয়। ৫ অধ্যায় ১৭ প্রতিজ্ঞা।

১৮ পরিবর্ত নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমনত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয়কে প্রথম হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্টের সম্বন্ধে প্রথমের যে নিষ্পত্তি চতুর্থকে তৃতীয় হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্টের সম্বন্ধে তৃতীয়ের সেই নিষ্পত্তি তবে ঐ পারিভাষিক শব্দের ব্যবহার হয়। ৫ অধ্যায় ১৮ প্রতিজ্ঞা।

১৯। দুয় সামান্যতাঃ। তিন কিয়। তদবিক রাশি প্রণীত হইলে এবং তৎসংখ্যক অপর কতিপয় রাশি অন্য প্রণীত কল্পিত হইলে যদি ঐতোক প্রণীত হইত রাশি অনুপাতীয় হয় এবং যদিএমত অনুমেয় হয় যে আদ্য প্রণীত

each rank, and it is inferred, that the first is to the last of the first rank of magnitudes, as the first is to the last of the others. Of this there are the two following kinds, which arise from the different order in which the magnitudes are taken two and two.

XX. *Ex æquali*, from equality : this term is used simply by itself, when the first magnitude is to the second of the first rank, as the first to the second of the other rank ; and as the second is to the third of the first rank, so is the second to the third of the other ; and so on in order, and the inference is as mentioned in the preceding definition ; whence this is called ordinate proportion. It is demonstrated in the 22d Prop. Book 5.

XXI. *Ex æquali, in proportionibus perturbatis, seu inordinatis* ; from equality, in perturbate, or disorderly proportion : this term is used when the first magnitude is to the second of the first rank, as the last but one is to the last of the second rank ; and as the second is to the third of the first rank, so is the last but two to the last but one of the second rank ; and as the third is to the fourth of the first rank, so is the third from the last, to the last but two, of the second rank ; and so on in a cross, or inverse order ; and the inference is as in the 19th definition. It is demonstrated in the 23d Prop. of Book V.

## AXIOMS.

I. **Equal multiples** of the same, or of equal magnitudes, are equal to one another.

প্রথম রাশির অন্তিম সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির ও অন্তিম সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি, তবে ঐ শব্দের প্রয়োগ হয়। ত্রিত্ব রূপে দুই রাশি উচ্চ হওয়াতে এবস্তৃত নিষ্পত্তির নিম্ন লিখিত দুই ধারা সম্ভাব্য।

১০। সামান্যতঃ। আদ্য শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি হইলে এবং আদ্য শ্রেণীস্থ দ্বিতীয় রাশির তৃতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ দ্বিতীয় রাশির তৃতীয় সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি তথা উত্তরোত্তর ক্রমশঃ তক্রপ নিষ্পত্তি সম্বন্ধ থাকিলে যদি পূর্বলক্ষণোক্ত অনুমান বোধ্য হয় তবে কেবল “সামান্যতঃ” এই শব্দের প্রয়োগ করা যায় একারণ ইহাকে যথাক্রম নিষ্পত্তি কহে। এবিষয় ৫ অধ্যায় ২২ প্রতিক্রান্তে উপপন্ন হইয়াছে।

২১। বিপরীত অথবা ক্রম রহিত নিষ্পত্তি সামান্যতঃ। আদ্য শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ একোন শেষের শেষরাশি সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি, এবং আদ্য শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের তৃতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ দুইন শেষ রাশির একোন শেষ সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি, তথা আদ্য শ্রেণীস্থ তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ দুইন শেষ রাশির দুইন শেষ সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি এবং উত্তরোত্তর এইরূপ বিরুদ্ধ অথবা বিপরীত ক্রম নিষ্পত্তি হইলে যদি ১৯ লক্ষণোক্ত অনুমান বোধ্য হয় তবে উক্ত শব্দের প্রয়োগ করা যায়। ইহা ৫ অধ্যায়ে ২৩ প্রতিক্রান্ত উপপন্ন হইয়াছে।

### বৃত্তঃ সাধা ।

১। এক অথবা সমান রাশির সম অলবর্ত্ত্য সকল পরস্পর সমান।

II. Those magnitudes of which the same, or equal magnitudes, are equimultiples, are equal to one another.

III. A multiple of a greater magnitude is greater than the same multiple of a less.

IV. The magnitude of which a multiple is greater than the same multiple of another, is greater than that other magnitude.

### PROP. I. THEOR.

*If any number of magnitudes be equimultiples of as many others, each of each, what multiple soever any one of the first is of its part, the same multiple is the sum of all the first of the sum of all the rest.*

Let any number of magnitudes A, B, and C be equimultiples of as many others, D, E, F, each of each;  $A + B + C$  is the same multiple of  $D + E + F$ , that A is of D.

Let A contain D, B contain E, and C contain F, each the same number of times, as, for instance, three times. Then, because A contains D three times,

$$A = D + D + D.$$

$$\text{For the same reason, } B = E + E + E;$$

$$\text{And also, } C = F + F + F.$$

Therefore, adding equals to equals (Ax. 2.1.),  $A + B + C$  is equal to  $D + E + F$ , taken three times. In

২। এক অথবা সমান২ রাশি যে২ রাশির সম অপবর্ত্য হয় সে সকল রাশি পরস্পর সমান।

৩। বৃহত্তর রাশির অপবর্ত্য লঘুতরের তৎপরিমাণানুযায়ী অপবর্ত্যের বৃহত্তর হয়।

৪। কোন রাশির অপবর্ত্য অন্য রাশির তাদৃশ অপবর্ত্য হইতে অধিক হইলে প্রথমোক্ত রাশি দ্বিতীয়াপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

### ১ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

কতিপয় রাশি যদি ক্রমশঃ তৎসংখ্যক অন্য কএক রাশির সম অপবর্ত্য করিত হয় তবে যৎপরিমাণে প্রথমোক্ত কোন রাশি স্বীয় অংশের অপবর্ত্য হয় সেই পরিমাণে প্রথমোক্ত সমুদয় রাশি একত্র যোগে অপর সমুদয় রাশি যোগের অপবর্ত্য হইবে।

ক খ গ কএক রাশি ক্রমশঃ য ও চ তৎসংখ্যক অপর কএক রাশির সম অপবর্ত্য করিত হউক। ক রাশি যে পরিমাণে য রাশির অপবর্ত্য ক + খ + গ সেই পরিমাণে য + ও + চ রাশির অপবর্ত্য হইবে।

ক খ গ এই তিন রাশি ক্রমশঃ সমান২ পরিমাণে য ও চ রাশি ত্রয়ের ব্যাপক হউক অর্থাৎ ত্রিগুণ পরিমাণে অপবর্ত্য হউক। অতএব ক ত্রিগুণ পরিমাণে য রাশির ব্যাপক একারণ

$$ক = য + য + য$$

$$\text{একারণ } খ = ও + ও + ও$$

$$\text{এবং } গ = চ + চ + চ$$

অতএব সমান২ রাশি ধোঁক করিলে (১২ স্বতঃ সাধ্য) ক + খ + গ = ত্রিগুণ য + ও + চ। সুতরাং ক খ গ অন্য কোন পরিমাণে ক্রমশঃ য ও চ রাশির সম অপবর্ত্য হইলে ক + খ +

the same manner; if  $A$ ,  $B$ , and  $C$  were each any other equimultiple of  $D$ ,  $E$ , and  $F$ , it would be shewn that  $A + B + C$  was the same multiple of  $D + E + F$ . Therefore, &c. Q. E. D.

Cor. Hence if  $m$  be any number,  $mD + mE + mF = m(D + E + F)$ . For  $mD$ ,  $mE$ , and  $mF$ , are multiples of  $D$ ,  $E$ , and  $F$  by  $m$ , therefore their sum is also a multiple of  $D + E + F$  by  $m$ .

### PROP. II. THEOR.

*If to a multiple of a magnitude by any number, a multiple of the same magnitude by any number be added the sum will be the same multiple of that magnitude that the sum of the two numbers is of unity,*

Let  $A = mC$ , and  $B = nC$ ;  $A + B = (m + n)C$

For, since  $A = mC$ ,  $A = C + C + C + \&c.$   $C$  being repeated  $m$  times. For the same reason,  $B = C + C + \&c.$   $C$  being repeated  $n$  times. Therefore, adding together equals,  $A + B$  is equal to  $C$  taken  $m + n$  times. That is,  $A + B = (m + n)C$ . Therefore  $A + B$  contains as oft as there are units in  $m + n$ . Q. E. D.

Cor. 1. In the same way, if there be any number of multiples whatsoever, as  $A = mE$ ,  $B = nE$ ,  $C = pE$ , it is shewn, that  $A + B + C = (m + n + p)E$

Cor. 2. Hence also, since  $A + B + C = (m + n + p)E$ , and since  $A = mE$ ,  $B = nE$ , and  $C = pE$ ,  $mE + nE + pE = (m + n + p)E$ .

গ সেই পরিমাণে ঘ + ঙ + চ রাশির অপবর্ত্য সম্মান হইবে। অতএব কতিপয় রাশি ইত্যাদি। ইহাই এক্ষণে উপপাদ্য।

অনুমান। অ যদি কোন সংখ্যাক অঙ্ক বলিয়া কল্পিত হয় তবে অঘ + অঙ + অচ = অ (ঘ + ঙ + চ) কেননা অঘ, অঙ, অচ, অ পরিমাণে ঘ ঙ চ রাশির অপবর্ত্য একারণ তাহারদের যোগও অ পরিমাণে ঘ + ঙ + চ অপবর্ত্য হইবে।

## ২ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

কোন রাশির কিয়ৎ পরিমাণ অপবর্ত্য যদি সেই রাশির কিয়ৎ পরিমাণ অপবর্ত্য যোগ করা যায় তবে ঐ দুই অঙ্ক সম্বন্ধে একের যে অপবর্ত্য হইবে ঐ দুই অপবর্ত্যের যোগে উক্ত রাশির সেই অপবর্ত্য হইবে।

ক = অগ এবং খ = ইগ কল্পনা করিলে ক + খ = (অ + ই) গ কেননা ক = অগ হওয়াতে, ক = গ + গ + গ ইত্যাদি অ ঙ গ পর্য্যন্ত। ঐ কারণে খ = গ + গ + গ ইত্যাদি ই ঙ গ পর্য্যন্ত। অতএব সমান ২ রাশি সমান ২ রাশিতে যোগ করিলে ক + খ রাশি অ + ই ঙ গ রাশি সমান হইবে অর্থাৎ ক + খ = (অ + ই) গ। সুতরাং ক + খ রাশি অ + ই পরিমাণে গ রাশির ব্যাপক হইবে। ইহাই এক্ষণে উপপাদ্য।

১ অনুমান। উক্ত যত অপবর্ত্য হউক যথা ক = অঙ, খ = ইঙ, গ = উঙ, ক + খ + গ = (অ + ই + উ) ঙ উপপন্ন হইবে।

২ অনুমান। অধিক ক + খ + গ = (অ + ই + উ) ঙ এবং ক = অঙ, খ = ইঙ, গ = উঙ, একারণ অঙ + ইঙ + উঙ = (অ + ই + উ) ঙ।



## PROP. III. THEOR.

*If the first of three magnitudes contain the second as oft as there are units in a certain number, and if the second contain the third also, as often as there are units in a certain number, the first will contain the third as oft as there are units in the product of these two numbers.*

Let  $A = mB$  and  $B = nC$ ; then  $A = mnC$ .

Since  $B = nC$ ,  $mB = nC + nC + \&c.$  repeated  $m$  times. But  $nC + nC \&c.$  repeated  $m$  times is equal to  $C$  (2 Cor. 2. 5.), multiplied by  $n + n + \&c.$   $n$  being added to itself  $m$  times; but  $n$  added to itself  $m$  times, is  $n$  multiplied by  $m$ , or  $mn$ . Therefore  $nC + nC + \&c.$  repeated  $m$  times  $= mnC$ ; whence also  $mB = mnC$ , and by hypothesis  $A = mB$ , therefore  $A = mnC$ . Therefore, &c. Q. E. D.

## PROP. IV. THEOR.

*If the first of four magnitudes has the same ratio to the second which the third has to the fourth, and if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any whatever of the second and fourth, the multiple of the first shall have the same ratio to the multiple of the second, that the multiple of the third has to the multiple of the fourth.*

Let  $A : B :: C : D$ , and let  $m$  and  $n$  be any two numbers;  $mA : nB :: mC : nD$ .

### ৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

তিন রাশির মধ্যে প্রথম রাশি যদি কিয়ৎ পরিমাণে দ্বিতীয় রাশির ব্যাপক হয় এবং দ্বিতীয় রাশিও যদি কিয়ৎ পরিমাণে তৃতীয় রাশির ব্যাপক হয় তবে প্রথম রাশি ঐ দুই অঙ্কের গুণন ফল পরিমাণে তৃতীয় রাশির ব্যাপক হইবে।

ক = অখ এবং খ = ইগ কল্পনা কর। তবে ক = অইগ হইবে।

খ = ইগ একারণ অখ = ইগ + ইগ ইত্যাদি অ বার পর্য্যন্ত। অপর ইগ + ইগ ইত্যাদি অ বার পর্য্যন্ত যোগ হইলে ই + ই ইত্যাদি স্বয়ং অ বার পর্য্যন্ত যোগে গুণিত গ সমান হইবে। অধিকন্তু ই আপনাতে অ বার পর্য্যন্ত যুক্ত হইলে অ দ্বারা গুণিত ই অর্থাৎ আই সমান হইবে (৫।২) দ্বিতীয় অনুমান)। অতএব ইগ + ইগ ইত্যাদি অ বার যোগে = অইগ সুতরাং অখ = অইগ। অপর ক = অখ কল্পিত হইয়াছে অতএব ক = অইগ। অতএব তিন রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

### ৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি রাশির মধ্যে যদি প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি সমান হয় এবং প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সম অপবর্ত্ত্য তথা দ্বিতীয় ও চতুর্থের কোন সম অপবর্ত্ত্য যদি কল্পনা করা যায় তবে প্রথম রাশির অপবর্ত্ত্য দ্বিতীয় রাশির অপবর্ত্ত্য সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি তৃতীয় রাশির অপবর্ত্ত্যের চতুর্থ রাশির অপবর্ত্ত্য সম্বন্ধীয় নিম্পত্তির সমান হইবে।

ক : খ :: গ : ঘ কল্পনা কর এবং অ ও ই কোন দুই অঙ্ক জান কর, তবে অক : ইগ :: অখ : ইঘ।

Take of  $mA$  and  $mC$  equimultiples by any number  $p$ , and of  $nB$  and  $nD$  equimultiples by any number  $q$ . Then the equimultiples of  $mA$  and  $mC$  by  $p$ , are equimultiples also of  $A$  and  $C$ , for they contain  $A$  and  $C$  as oft as there are units in  $pm$  (3. 5.), and are equal to  $pmA$  and  $pmC$ . For the same reason, the multiples of  $nB$  and  $nD$  by  $q$ , are  $qnB$ ,  $qnD$ . Since, therefore,  $A : B :: C : D$ , and of  $A$  and  $C$  there are taken any equimultiples, viz.  $pmA$  and  $pmC$ , and of  $B$  and  $D$ , any equimultiples  $qnB$ ,  $qnD$ , if  $pmA$  be greater than  $qnB$ ,  $pmC$  must be greater than  $qnD$  (Def. 5. 5.); if equal, equal; and if less, less. But  $pmA$ ,  $pmC$  are also equimultiples of  $mA$  and  $mC$ , and  $qnB$ ,  $qnD$  are equimultiples of  $nB$  and  $nD$ , therefore (Def. 5. 5.),  $mA : nB :: mC : nD$ . Therefore, &c. Q. E. D.

COR. In the same manner, it may be demonstrated, that if  $A : B :: C : D$ , and of  $A$  and  $C$  equimultiples be taken by any number  $m$ , viz.  $mA$  and  $mC$ ;  $mA : B :: mC : D$ . This may also be considered as included in the proposition, and as being the case when  $n=1$ .

### PROP. V. THEOR.

*If one magnitude be the same multiple of another, which a magnitude taken from the first is of a magnitude taken from the other; the remainder is the same multiple of the remainder, that the whole is of the whole.*

Let  $mA$  and  $mB$  be any equimultiples of the two magnitudes  $A$  and  $B$ , of which  $A$  is greater than  $B$ ;

অক এবং অগ রাশির কোন অক্ষ অর্থাৎ উ পরিমাণে সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং ইখ ও ইঘ রাশির কোন অক্ষ অর্থাৎ ঋ পরিমাণে সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর। উ পরিমাণে অক এবং অগ রাশির সম অপবর্ত্ত্য ক এবং গ রাশিরও সম অপবর্ত্ত্য হইবে কেননা তাহারা উ অ পরিমাণে ক এবং গ রাশির ব্যাপক (৫।৩) সূত্রাৎ উ অক এবং উ অগ তুল্য হইবে। ঐ কারণ ঋ পরিমাণে ইখ এবং ইঘ রাশির অপবর্ত্ত্য ঋইখ এবং ঋইঘ হইবে। অতএবক : খ :: গ : ঘ হও-  
য়াতে এবং ক ও গ রাশির উ অক এবং উ অগ সম অপবর্ত্ত্য তথা খ এবং ঘ রাশির ঋইখ ও ঋইঘ সম অপবর্ত্ত্য কল্পিত হওয়াতে উ অক যদি উ অগ রাশির অধিক হয় তবে ঋইখ ও ঋইঘ রাশির অধিক হইবেক যদি সমান হয় তবে সমান এবং যদি স্থান হয় তবে স্থান হইবেক (৫।৫ সংজ্ঞা) অপর ই অক এবং ই অগ, অক এবং অগ রাশিরও সম অপবর্ত্ত্য এবং ঋইখ ও ঋইঘ ইখ এবং ইঘ রাশির সম অপবর্ত্ত্য অত-  
এব ইক : অখ :: অগ : ইঘ। অতএব চারি রাশির ইত্যাদি। ইহাই এক্ষণে উপপাদ্য।

অনুমান। তদ্রূপ যদি ক : খ :: গ : ঘ হয় এবং কোন অক্ষ অর্থাৎ অ পরিমাণে ক এবং গ রাশির সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা করা যায় যখন অক এবং অগ তবে অক : খ :: অগ : ঘ উপপন্ন হইবে। কিন্তু এ অনুমান উক্ত প্রতিক্রান্তেই উক্ত ইহা কহা যাইতে পারে কেননা অ = ১ হইলে ঐ উপ-  
পত্তি হইবে।

### ৫ প্রতিক্রান্ত। উপপাদ্য।

এক রাশি যে পরিমাণে অন্য কোন রাশির অপবর্ত্ত্য সেই পরিমাণে প্রথমের এক ভাগ যদি অপরের এক ভাগের অপ-  
বর্ত্ত্য হয় তবে সমুদয় রাশি যে পরিমাণে সমুদয়ের অপ-

$mA - mB$  is the same multiple of  $A - B$  that  $mA$  is of  $A$ ; that is,  $mA - mB = m(A - B)$ .

Let  $D$  be the excess of  $A$  above  $B$ , then  $A - B = D$ , and, adding  $B$  to both,  $A = D + B$ . Therefore (1. 5.)  $mA = mD + mB$ ; take  $mB$  from both, and  $mA - mB = mD$ ; but  $D = A - B$ , therefore  $mA - mB = m(A - B)$ . Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. VI. THEOR.

*If from a multiple of a magnitude by any number a multiple of the same magnitude by a less number be taken away, the remainder will be the same multiple of that magnitude, that the difference of the numbers is of unity.*

Let  $mA$  and  $nA$  be multiples of the magnitude  $A$ , by the numbers  $m$  and  $n$ , and let  $m$  be greater than  $n$ ;  $mA - nA$  contains  $A$  as oft as  $m - n$  contains unity, or  $mA - nA = (m - n)A$ .

Let  $m - n = q$ , then  $m = n + q$ . Therefore (2. 3.)  $mA = nA + qA$ , take  $nA$  from both, and  $mA - nA = qA$ . Therefore  $mA - nA$  contains  $A$  as oft as there are units in  $q$ , that is, in  $m - n$ , or  $mA - nA = (m - n)A$ . Therefore, &c. Q. E. D.

Cor. When the difference of the two numbers is equal to unity, or  $m - n = 1$ , then  $mA - nA = A$ .

যদি অবশিষ্ট ভাগও সেই পরিমাণে অবশিষ্টের অপবর্ত্য হইবে

অক এবং অখ রাশি ক এবং খ রাশির কোন সম অপবর্ত্য কল্পনা কর তাহার মধ্যে ক রাশি খ রাশি হইতে অধিক । অক যে পরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্য অক—অখ সেই পরিমাণে ক—খ রাশির অপবর্ত্য হইবে অর্থাৎ অক—অখ = অ (ক—খ) ।

ক হইতে খ ব্যবকলন করিলে য অবশিষ্ট কল্পনা কর যতএব ক—খ = য । অপর উভয় পার্শ্বে খ যোগ করিলে ক = য + খ । অতএব (৫।১) অক = অয + অখ এবং উভয় পার্শ্বে অখ বিয়োগ করিলে অক — অখ = অয । অধিকন্তু য = ক—খ অতএব অক—অখ = অ (ক—খ) । অতএব এক রাশি ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

### ৬ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

কোন রাশির কিয়ৎ পরিমাণাভূয়ায়ি অপবর্ত্য হইতে সেই রাশির তদপেক্ষা ক্ষুদ্র পরিমাণাভূয়ায়ি অপবর্ত্য ব্যবকলন করিলে ঐ দুই অঙ্কের অন্তর যে পরিমাণে একের অপবর্ত্য সেই পরিমাণে অবশিষ্টাংশ উক্ত রাশির অপবর্ত্য হইবে ।

অক এবং ইক অ এবং ই পরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্য কল্পনা কর এবং অ অক ই হইতে অধিক জ্ঞান কর । অক—ইক অ—ই পরিমাণে ক রাশির ব্যাপক হইবে অর্থাৎ অক—ইক = (অ—ই) ক ।

অ—ই = উ কল্পনা কর তাহাতে অ = ই + উ অতএব (২।৩) অক = ইক + উক । উভয় পার্শ্বে ইক বিয়োগ কর তাহাতে অক—ইক = উক হইবে ।

## PROP. A. THEOR.

*If four magnitudes be proportionals, they are proportionals also when taken inversely.*

If  $A : B :: C : D$ , then also  $B : A :: D : C$ .

Let  $mA$  and  $mC$  be any equimultiples of  $A$  and  $C$ ,  $nB$  and  $nD$  any equimultiples of  $B$  and  $D$ . Then, because  $A : B :: C : D$ , if  $mA$  be less than  $nB$ ,  $mC$  will be less than  $nD$  (Def. 5. 5.), that is, if  $nB$  be greater than  $mA$ ,  $nD$  will be greater than  $mC$ . For the same reason, if  $nB = mA$ ,  $nD = mC$ , and if  $nB < mA$ ,  $nD < mC$ . But  $nB$ ,  $nD$  are any equimultiples of  $B$  and  $D$ , and  $mA$ ,  $mC$  any equimultiples of  $A$  and  $C$ , therefore (Def 5. 5.),  $B : A :: D : C$ . Therefore, &c. Q. E. D.

## PROP. B. THEOR.

*If the first be the same multiple of the second, or the same part of it, that the third is of the fourth; the first is to the second as the third to the fourth.*

First, if  $mA$ ,  $mB$  be equimultiples of the magnitudes  $A$  and  $B$ ;  $mA : A :: mB : B$ .

Take of  $nA$  and  $mB$  equimultiples by any number  $n$ ; and of  $A$  and  $B$  equimultiples by any number  $p$ : these will be  $nmA$  (3. 5.),  $nmB$  (3. 5.),  $pA$ ,  $pB$ . Now, if  $nmA$  be greater than  $pA$ ,  $nm$  is also greater than  $p$ ; and if

অতএব অক—ইক রাশি উ অর্থাৎ অ—ই পরিমাণে ক রাশির ব্যাপক হইবে অর্থাৎ অক—ইক = (অ—ই) ক ।

অতএব কোন রাশি ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

অনুমান । দুই অঙ্কের অন্তর এক হইলে অর্থাৎ অ—ই = ১ হইলে অক—ইক = ক ।

ক প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

চারি অনুপাতীয় রাশিকে বিলোম অর্থাৎ অগ্র পশ্চাৎ করিলেও তাহার অনুপাতীয় থাকিবে ।

বদি ক : খ :: গ : ঘ তবে ধ : ক :: ঘ : গ হইবে । অক এবং অগ ক এবং গ রাশির কোন সম অপবর্ত্তা কল্পনা কর এবং ইখ ও ইঘ ধ এবং ঘ রাশির কোন সম অপবর্ত্তা কল্পনা কর ।

অতএব ক : খ :: গ : ঘ একারণ অক ইখ হইতে যদি ছ্যন হয় তবে অগ ও ইঘ হইতে ছ্যন হইবে (৫।৫ সঃ) অর্থাৎ ইখ যদি অক হইতে অধিক হয় তবে ইঘ ও অগ হইতে অধিক হইবে ।

এ কারণ যদি ইখ = অক, তবে ইঘ = অগ এবং যদি ইখ < অক, তবে ইঘ < অগ হইবে ।

অপর ইখ এবং ইঘ খ এবং ঘ রাশির সম অপবর্ত্তা এবং অক ও অগ ক ও গ রাশির সম অপবর্ত্তা অতএব ধ : ক :: ঘ : গ । অতএব চারি অনুপাতীয় ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

খ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে অপবর্ত্তা অথবা অংশ তৃতীয় যদি চতুর্থের সেই অপবর্ত্তা বা অংশ হয় তবে প্রথমের দ্বিতীয় সহিত যে নিম্পত্তি সম্বন্ধ তৃতীয়ের চতুর্থ সহিত সেই নিম্পত্তি সম্বন্ধ হইবে ।

প্রথমতঃ অক এবং অখ যদি ক এবং খ রাশির সম অপবর্ত্তা হয় তবে অক : ক :: অখ : খ । অক এবং অখ রাশির ই পরিমাণ সম অপবর্ত্তা কল্পনা কর এবং ক ও খ রাশির উ পরিমাণে সম অপবর্ত্তা কল্পনা কর । এই সকল অপবর্ত্তা ক্রমশঃ



$nm$  be greater than  $p$ ,  $nmB$  is greater than  $pB$ ; therefore, when  $nmA$  is greater than  $pA$ ,  $nmB$  is greater than  $pB$ . In the same manner, if  $nmA = pA$ ,  $nmB = pB$ , and if  $nmA < pA$ ,  $nmB < pB$ . Now,  $nmA$ ,  $nmB$  are any equimultiples of  $mA$  and  $mB$ ; and  $pA$ ,  $pB$  are any equimultiples of  $A$  and  $B$ , therefore,  $mA : A :: mB : B$  (Def. 5. 5.).

Next, let  $C$  be the same part of  $A$  that  $D$  is of  $B$ ; then  $A$  is the same multiple of  $C$  that  $B$  is of  $D$ , and therefore as has been demonstrated,  $A : C :: B : D$ , and inversely (A. 5.),  $C : A :: D : B$ . Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. C. THEOR.

*If the first be to the second as the third to the fourth; and if the first be a multiple or a part of the second, the third is the same multiple or the same part of the fourth.*

Let  $A : B :: C : D$ , and first, let  $A$  be a multiple of  $B$ ;  $C$  is the same multiple of  $D$ ; that is, if  $A = mB$   $C = mD$ .

Take of  $A$  and  $C$  equimultiples by any number as : viz.  $2A$  and  $2C$ ; and of  $B$  and  $D$ , take equimultiples by the number  $2m$ , viz.  $2mB$ ,  $2mD$  (3. 5.); then because  $A = mB$ ,  $2A = 2mB$ ; and since  $A : B :: C : D$ , and since  $2A = 2mB$ , therefore  $2C = 2mD$  (def. 5. 5.), and

ইঅক, উক, ইঅখ, এবং উখ হইবে। অপর ইঅক যদি উক হইতে অধিক হয় তবে ইঅ ও উ হইতে অধিক হইবে এবং ইঅ যদি উ হইতে অধিক হয় তবে ইঅখ উখ হইতে অধিক হইবে অতএব যে স্থলে ইঅক উক হইতে অধিক সে স্থলে ইঅখ উখ হইতে অধিক। তদ্রূপ যদি ইঅক = উক তবে ইঅখ = উখ এবং যদি ইঅক < উক তবে ইঅখ < উখ। অপর ইঅক ইঅখ দুই রাশি অক এবং অখ রাশির সম অপবর্ত্য এবং উক ও উখ দুই রাশি ক এবং খ রাশির সম অপবর্ত্য অতএব অক : ক :: অখ : খ (৫।৫ সং)।

দ্বিতীয়তঃ গ রাশি যে পরিমাণে ক রাশির অংশ য সেই পরিমাণে খ রাশির অংশ কল্পনা কর তাহাতে ক যে পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্য য সেই পরিমাণে খ রাশির অপবর্ত্য হইবে ভ্রমিমিত্ত পূরোক্ত ন্যায়েতে ক : গ :: খ : য এবং (৫।ক প্রতিক্রিয়ানারে) বিলোম নিষ্পত্তি সম্বন্ধে গ : ক :: য : খ। অতএব প্রথম রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

### গ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

প্রথম রাশির দ্বিতীয় সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ চতুর্থ সহিত তৃতীয়ের সেই নিষ্পত্তি সম্বন্ধ হইলে প্রথম রাশি যদি কিয়ৎপরিমাণে দ্বিতীয়ের অপবর্ত্য বা অংশ হয় তবে তৃতীয়ও সেই পরিমাণে চতুর্থের অপবর্ত্য বা অংশ হইবে।

ক : খ :: গ : য কল্পনা কর এবং প্রথমতঃ ক রাশি খ রাশির অপবর্ত্য হউক। গ সেই পরিমাণে য রাশির অপবর্ত্য হইবে অর্থাৎ যদি ক = অখ তবে য = অখ।

ক এবং খ রাশির কিয়ৎপরিমাণে (অর্থাৎ দ্বি সংখ্যক অক পরিমাণে) সম অপবর্ত্য কল্পনা কর অর্থাৎ ২ক এবং ২গ এবং খ ও য রাশির ২য় পরিমাণে সম অপবর্ত্য কল্পনা কর অর্থাৎ ২অখ ও ২অয (৫।৩) অতএব ক = অখ একারণ ২ক = ২অখ। অপর ক : খ :: গ : য এবং ২ক = ২অখ

$C = mD$ , that is,  $C$  contains  $D$   $m$  times, or as often as  $A$  contains  $B$ ,

Next, Let  $A$  be a part of  $B$ ,  $C$  is the same part of  $D$ . For, since  $A : C :: C : D$ , inversely (A. 5)  $B : A :: D : C$ . But  $A$  being a part of  $B$ ,  $B$  is a multiple of  $A$ , and therefore, as is shewn above,  $D$  is the same multiple of  $C$ , and therefore  $C$  is the same part of  $D$  that  $A$  is of  $B$ . Therefore &c. Q. E. D.

### PROP. VII THEOR.

*Equal magnitudes have the same ratio to the same magnitude, and the same has the same ratio to equal magnitudes.*

Let  $A$  and  $B$  be equal magnitudes, and  $C$  any other;  
 $A : C :: B : C$ .

Let  $mA$ ,  $nB$  be any equimultiples of  $A$  and  $B$ ; and  $nC$  any multiple of  $C$

Because  $A = B$ ,  $mA = mB$  (Ax. 1. 5): wherefore, if  $mA$  be greater than  $nC$ ,  $mB$  is greater than  $nC$ ; and if  $mA = nC$ ,  $mB = nC$ ; if  $mA < nC$ ,  $mB < nC$ . But  $mA$  and  $mB$  are any equimultiples of  $A$  and  $B$ , and  $nC$  is any multiple of  $C$ , therefore (Def. 5. 5.)  $A : C :: B : C$ .

Again, if  $A = B$ ;  $C : A :: C : B$ ; for, as has been proved,  $A : C :: B : C$ , and inversely (A. 5),  $C : A :: C : B$ . Therefore, &c. Q. E. D.

একারণ ২গ = ২অথ (৫।৫ সং) অতএব গ = অথ সুতরাং গ রাশি অ পরিমাণে ষ রাশির ব্যাপক অর্থাৎ যে পরিমাণে ক রাশি ষ রাশির ব্যাপক সেই পরিমাণে গ রাশি ষ রাশির ব্যাপক ।

দ্বিতীয়তঃ ক রাশি ষ রাশির অংশ কল্পনা কর তাহাতে গ রাশি ষ রাশির তদ্রূপ অংশ হইবে, কেননা ক : ষ :: গ : ষ তন্মিহিত বিলোম নিষ্পত্তিতে ( ৫।ক প্রতিজ্ঞা ) ষ : ক :: ষ : গ । অপর ক রাশি ষ রাশির অংশ হওয়াতে ষ রাশি ক রাশির অপবর্ত্য অতএব পূর্বোক্ত উপপত্ত্যুসারে ষ রাশি গ রাশির ঐ রূপ অপবর্ত্য সুতরাং ক রাশি ষ রাশির যে অংশ গ রাশিও ষ রাশির সেই অংশ । অতএব প্রথমরাশির ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

### ৭ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

কোন এক রাশির সহিত সমান ২ রাশির নিষ্পত্তি সম্বন্ধ সমান হয় এবং সমান ২ রাশি সম্বন্ধে এক রাশির নিষ্পত্তিও সমান হয় ।

ক এবং ষ সমান ২ রাশি এবং গ অন্য কোন রাশি কল্পনা কর তাহাতে ক : গ :: ষ : গ উপপন্ন হইবে ।

অক এবং অথ ক এবং ষ রাশির কোন সম অপবর্ত্য এবং ইগ গ রাশির কোন অপবর্ত্য হউক ।

ক = ষ একারণ অক = অথ ( ৫।১ স্বতঃ সাধ্য ) অতএব অক যদি ইগ হইতে অধিক হয় তবে অথ রাশিও ইগ হইতে অধিক হইবে এবং যদি অক = ইগ তবে অথ = ইগ অথবা যদি অক < ইগ তবে অথ < ইগ । অপর অক এবং অথ ক এবং ষ রাশির কোন সম অপবর্ত্য এবং ইগ গ রাশির কোন অপবর্ত্য অতএব ( ৫।৫ সং ) ক : গ :: ষ : গ ।

অপিচ যদি ক = ষ তবে ক : গ :: গ : ষ কেননা পূর্ব উপপত্ত্যুসারে ক : গ :: ষ : গ সুতরাং ( ৫।ক প্রতিজ্ঞা ) গ : ক :: গ : ষ অতএব কোন এক রাশির ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

## PROP. VIII. THEOR.

*Of unequal magnitudes, the greater has a greater ratio to the same than the less has ; and the same magnitude has a greater ratio to the less than it has to the greater.*

Let  $A + B$  be a magnitude greater than  $A$ , and  $C$  a third magnitude ;  $A + B$  has to  $C$  a greater ratio than  $A$  has to  $C$  ; and  $C$  has a greater ratio to  $A$  than it has to  $A + B$ .

Let  $m$  be such a number that  $mA$  and  $mB$  are each of them greater than  $C$  ; and let  $nC$  be the least multiple of  $C$  that is not less\* than  $mA + mB$  ; then  $nC - C$ , that is,  $(n-1)C$  (1. 5) will be less than  $mA + mB$ , or  $mA + mB$ , that is,  $m(A + B)$  is greater than  $(n-1)C$ . But because  $nC$  is not less than  $mA + mB$ , and  $C$  less than  $mB$ ,  $nC - C$  is greater than  $mA$  or  $mB$ , is less than  $nC - C$ , that is, than  $(n-1)C$ . Therefore the multiple of  $A + B$  by  $m$  exceeds the multiple of  $C$  by  $n-1$ , but the multiple of  $A$  by  $m$  does not exceed the multiple of  $C$  by  $n-1$  ; therefore  $A + B$  has a greater ratio to  $C$  than  $A$  has to  $C$  (Def. 7. 5.)

---

\* The original text is, "Let  $nC$  be the least multiple of  $C$  that exceeds  $mA + mB$ " ; but in that case it does not necessarily follow that  $(n-1)C$  is less than  $mA + mB$  ; it might be equal.

## ৮ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

বিষম রাশির মধ্যে বৃহত্তরের কোন রাশি সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক্ষুদ্রতরের সেই রাশি সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক; এবং কোন রাশির বৃহত্তর সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক্ষুদ্রতর সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অল্প।

ক + খ রাশি ক রাশির বৃহত্তর কল্পনা কর এবং গ অন্য কোন রাশি কল্পনা কর। ক + খ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক এবং গ রাশির ক সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক + খ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক।

অ এমত এক অক কল্পনা কর যেন অক অখ প্রত্যেকে গ অপেক্ষা অধিক হয়। অপর অক + অখ হইতে অন্যান্য\* অথচ গ রাশির ক্ষুদ্রতম অপবর্ত্য এমত এক রাশি কল্পনা কর যথা ইগ তাহাতে ইগ—গ অর্থাৎ (ই—১)গ (১. ৫.) অক + অখ হইতে স্থান হইবে অথবা অক + অখ অর্থাৎ অ (ক + খ) রাশি (ই—১)গ হইতে অধিক হইবে। অধিকন্তু অগ রাশি অক + অখ রাশি হইতে অন্যান্য এবং গ রাশি অখ হইতে স্থান একারণ ইগ—গ  $\rightarrow$  অক অর্থাৎ অক  $<$  ইগ—গ সুতরাং অক  $<$  (ই—১)গ অতএব অ পরিমাণে ক + খ রাশির অপবর্ত্য অ—১ পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্য হইতে অধিক কিন্তু অ পরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্য ই—১ পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্য হইতে অধিক নহে অতএব (৫।৭ সং) ক + খ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক রাশির গ সম্বন্ধীয় হইতে অধিক।

\* মূল গ্রন্থে লিখিত আছে “অধিক” তাহাতে প্রমাণে দোষ আইসে কেননা তাহা হইলে (ই—১)গ রাশি অক + অখ হইতে নিষ্কাশিত হইত না, সমান হইতেও পারিত।

Again, because the multiple of  $C$  by  $n-1$ , exceeds the multiple of  $A$  by  $m$ , but does not exceed the multiple of  $A + B$  by  $m$ ,  $C$  has a greater ratio to  $A$  than it has to  $A + B$  (Def. 7. 5.) Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. IX. THEOR.

*Magnitudes which have the same ratio to the same magnitude are equal to one another; and those to which the same magnitude has the same ratio are equal to one another.*

If  $A : C :: B : C$ ;  $A = B$ .

For, if not, let  $A$  be greater than  $B$ ; then, because  $A$  is greater than  $B$ , two numbers,  $m$  and  $n$ , may be found, as in the last proposition, such that  $mA$  shall exceed  $nC$ , while  $mB$  does not exceed  $nC$ . But because  $A : C :: B : C$ ; if  $mA$  exceed  $nC$ ,  $mB$  must also exceed  $nC$  (def. 5. 5.); and it is also shewn that  $mB$  does not exceed  $nC$ , which is impossible. Therefore  $A$  is not greater than  $B$ ; and in the same way it is demonstrated that  $B$  is not greater than  $A$ ; therefore  $A$  is equal to  $B$ .

Next, let  $C : A :: C : B$ ;  $A = B$ . For, by inversion (A. 5.),  $A : C :: B : C$ ; and therefore by the first case,  $A = B$ .

### PROP. X. THEOR.

*That magnitude, which has a greater ratio than another has to the same magnitude, is the greater of the two*

অপিচ ই—১ পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্য অপরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্য হইতে অধিক কিন্তু অ পরিমাণে ক + খ রাশির অপবর্ত্য হইতে অধিক নহে একারণ গ রাশির ক সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক + খ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি হইতে অধিক। অতএব বিষম ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

## ৯ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যে২ রাশির এক রাশির সহিত সমান নিষ্পত্তি সম্বন্ধ সে সকল রাশি পরস্পর সমান এবং যে২ রাশির সহিত এক রাশির সমান নিষ্পত্তি সম্বন্ধ সে সকল রাশিও পরস্পর সমান।

যদি ক : গ :: খ : গ তবে ক = খ।

কেননা যদি এমত না হয় তবে ক > খ কল্পনা কর। অতএব ক রাশি খ হইতে অধিক একারণ পূর্বোক্ত প্রতিজ্ঞার দ্বারা অ এবং ই এমত দুই অঙ্ক কল্পনা করা যাইতে পারে যে অক ইগ রাশির অধিক অথচ অখ ইগ রাশির অনধিক হয়। অপর ক : গ :: খ : গ হওয়াতে অক যদি ইগ হইতে অধিক হয় তবে অখও ইগ হইতে অধিক হইবে (৫।৫) কিন্তু অখ ইগ রাশির অনধিক দর্শিত হইয়াছে অতএব ইহা অসম্ভবপন্ন হইল। সুতরাং ক রাশি খ রাশির অধিক নহে। তদ্রূপ খ রাশি ক রাশির অধিক নহে ইহাও উপপন্ন হইবে অতএব ক খ পরস্পর সমান।

অপিচ গ : ক :: গ : খ কল্পনা কর তাহাতে ক = খ হইবে কেননা বিলোম নিষ্পত্তি দ্বারা (৫।ক) ক : গ :: খ : গ সুতরাং পূর্বোক্ত উপপত্ত্যদ্বারা ক = খ।

## ১০ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই রাশির মধ্যে যে রাশির নিষ্পত্তি পরিমাণ অন্য এক রাশি সম্বন্ধে অধিক সেই রাশি বৃহত্তর এবং যাহার সম্বন্ধে



*And that magnitude, to which the same has a greater ratio than it has to another magnitude, is the less of the two.*

If the ratio of  $A$  to  $C$  be greater than that of  $B$  to  $C$ ;  $A$  is greater than  $B$ .

Because  $A : C \succ B : C$ , two numbers  $m$  and  $n$  may be found, such that  $mA \succ nC$ , and  $mB \leq nC$  (Def. 7. 5.) Therefore, also  $mA \succ mB$ , and  $A \succ B$  (Ax. 4. 5.)

Again, Let  $C : B \succ C : A$ ; then  $B \leq A$ . For two numbers,  $m$  and  $n$  may be found, such that  $mC \succ nB$ , and  $mC \leq nA$  (Def. 7. 5.) Therefore, since  $nB$  is less, and  $nA$  greater than the same magnitude  $mC$ ,  $nB \leq nA$ , and  $B \leq A$ . Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. XI. THEOR.

*Ratios that are equal to the same ratio are equal to one another.*

If  $A : B :: C : D$ ; and also  $C : D :: E : F$ ; then  $A : B :: E : F$ .

Take  $mA$ ,  $mC$ ,  $mE$ , any equimultiples of  $A$ ,  $C$ , and  $E$ ; and  $nB$ ,  $nD$ ,  $nF$ , any equimultiples of  $B$ ,  $D$ , and  $F$ . Because  $A : B :: C : D$ , if  $mA \succ nB$ ,  $mC \succ nD$  (Def. 5. 5.); but if  $mC \succ nD$ ,  $mE \succ nF$  (Def 5. 5.), because  $C : D :: E : F$ ; therefore if  $mA \succ nB$ ,  $mE \succ nF$ . In the same manner, if  $mA = nB$ ,  $mE = nF$ ; and if  $mA \leq nB$ ,  $mE \leq nF$ . Now,  $mA$ ,  $mE$  are any

অন্য এক রাশির নিম্পত্তি পরিমাণ অধিক সেই রাশি উভয়ের মধ্যে স্থান।

যদি গ সম্বন্ধে ক রাশির নিম্পত্তি পরিমাণ খ রাশির নিম্পত্তি পরিমাণ অপেক্ষা অধিক হয় তবে খ হইতে ক অধিক।

ক : গ — খ : গ একারণ এমত দুই সংখ্যাত্মক অঙ্ক যথা অ ই কল্পনা করা যায় যে অক — ইগ অথচ অখ < ইগ হইবে ( ৫৭ সং ) অতএব অক > অখ এবং ক > খ ( ৫৪ স্বতঃ সাধ্য )।

অপিচ গ : খ — গ : ক কল্পনা কর তাহাতে খ < ক হইবে কেননা এমত দুই সংখ্যাত্মক অঙ্ক যথা অ ই কল্পনা করা যাইতে পারে যাহাতে অগ — ইখ অথচ অগ < ইক হইবে ( ৫৭ সং ) অতএব অগ এক রাশির সম্বন্ধে ইখ স্থান এবং ইক অধিক হওয়াতে ইখ — ইক সুতরাং খ < ক। অতএব দুই রাশির মধ্যে ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

## ১১ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

যে২ নিম্পত্তি পরিমাণ অন্য কোন সামান্য নিম্পত্তি পরিমাণের সমান তাহার২ পরস্পরও সমান।

যদি ক : খ :: গ : ঘ এবং গ : ঘ :: ড : চ তবে ক : খ :: ড : চ হইবে।

ক, গ, ড, রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য যথা অক, অগ, অড, এবং খ, ঘ, চ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য যথা ইখ, ইঘ, ইড, কল্পনা কর। ক : খ :: গ : ঘ হওয়াতে যদি অক > ইখ হয় তবে অগ > ইঘ হইবে ( ৫৫ সং ) কিন্তু যদি অগ > ইঘ তবে অড > ইচ হইবে ( ৫৫ সং ) কেননা গ : ঘ :: ড : চ অতএব অক > ইখ হইলে অড > ইচ হইবে। তদ্রূপ অক = ইখ হইলে অড = ইচ, এবং অক < ইখ

equimultiples whatever of A and E; and  $nB$ ,  $nF$  any whatever of B and F; therefore  $A : B :: E : F$ , (Def. 5. 5.) Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. XII. THEOR.

*If any number of magnitudes be proportionals, as one of the antecedents is to its consequent, so are all the antecedents, taken together, to all the consequents.*

If  $A : B :: C : D$ , and  $C : D :: E : F$ ; then also,  
 $A : B :: A + C + E : B + D + F$ .

Take  $mA$ ,  $mC$ ,  $mE$  any equimultiples of A, C, and E; and  $nB$ ,  $nD$ ,  $nF$  any equimultiples of B, D, and F. Then, because  $A : B :: C : D$ , if  $mA > nB$ ,  $mC > nD$  (Def. 5. 5.); and when  $mC > nD$ ,  $mE > nF$ , because  $C : D :: E : F$ . Therefore, if  $mA > nB$ ,  $mA + mC + mE > nB + nD + nF$ . In the same manner, if  $mA = nB$ ,  $mA + mC + mE = nB + nD + nF$ ; and if  $mA < nB$ ,  $mA + mC + mE < nB + nD + nF$ . Now,  $mA + mC + mE = m(A + C + E)$  (Cor. 1. 5.), so that  $mA + mC + mE$  are any equimultiples of A, and of  $A + C + E$ . And for the same reason,  $nB$ , and  $nB + nD + nF$  are any equimultiples of B, and of  $B + D + F$ ; therefore (Def. 5. 5.)  $A : B :: A + C + E : B + D + F$ . Therefore, &c. Q. E. D.

হইলে অঙ < ইচ উপপন্ন হইবে। অধিকন্তু অক এবং অগ  
ক এবং ঙ রাশির কোন সম অপবর্ত্য এবং ইখ ও ইচ ঙ  
এবং চ রাশির কোন সম অপবর্ত্য অতএব ক : খ ::  
ঙ : চ। অতএব যে২ নিষ্পত্তি ইত্যাদি। ইহাই এখানে  
উপপাদ্য।

## ১২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কতিপয় রাশি অল্পপাতীয় হইলে কোন অগ্রবর্ত্তি রাশির  
তদনুবর্ত্তি রাশি সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি সমুদয় অগ্রবর্ত্তির সমুদয়  
অনুবর্ত্তি সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি।

যদিক : খ :: গ : ঘ এবং গ : ঘ :: ঙ : চ হয় তবে ক :  
খ :: ক + গ + ঙ : খ + ঘ + চ হইবে।

ক, গ, ঙ রাশির অক, অগ, অঙ সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা  
কর এবং খ, ঘ, চ, রাশির ইখ, ইঘ, ইচ, সম অপবর্ত্ত্য  
কল্পনা কর। অপর ক : খ :: গ : ঘ একারণ অক >  
ইখ হইলে অগ > ইঘ হইবে (৫।৫ সং) এবং অগ  
> ইঘ হইলে অঙ > ইচ হইবে কেননা গ : ঘ :: ঙ : চ।  
অতএব অক > ইখ হইলে অক + অগ + অঙ > ইখ +  
ইঘ + ইচ হইবে। তদুপ অক = ইখ হইলে অক + অগ  
+ অঙ = ইখ + ইঘ + ইচ হইবে। তথা অক < ইখ  
হইলে অক + অগ + অঙ < ইখ + ইঘ + ইচ হইবে।  
অনন্তর অক + অগ + অঙ = অ (ক + গ + ঙ) (৫।১)  
তুতরাং অক এবং অক + অগ + অঙ ক্রমশঃ ক এবং ক +  
গ + ঙ রাশির সম অপবর্ত্ত্য। তদুপ ইখ এবং ইখ + ইঘ  
+ ইচ ক্রমশঃ খ এবং খ + ঘ + চ রাশির সম অপবর্ত্ত্য  
অতএব (৫।৫ সং) ক : খ :: ক + গ + ঙ : খ + ঘ + চ।  
অতএব কতিপয় রাশি ইত্যাদি। ইহাই এখানে উপপাদ্য।

## PROP. XIII. THEOR.

*If the first have to the second the same ratio which the third has to the fourth, but the third to the fourth, a greater ratio than the fifth has to the sixth; the first has also to the second a greater ratio than the fifth has to the sixth.*

If  $A : B :: C : D$ ; but  $C : D \succ E : F$ ; then also,  $A : B \succ E : F$ .

Because  $C : D \succ E : F$ , there are two numbers  $m$  and  $n$ , such that  $mC \succ nD$ , but  $mE \leq nF$  (Def. 7. 5.) Now, if  $mC \succ nD$ ,  $mA \succ nB$ , because  $A : B :: C : D$ . Therefore  $mA \succ nB$ , and  $mE \leq nF$ , wherefore,  $A : B \succ E : F$  (Def. 7. 5.) Therefore, &c. Q. E. D.

## PROP. XIV. THEOR.

*If the first have to the second the same ratio which the third has to the fourth, and if the first be greater than the third, the second shall be greater than the fourth; if equal, equal; and if less, less.*

If  $A : B :: C : D$ ; then if  $A \succ C$ ,  $B \succ D$ ; if  $A = C$ ,  $B = D$ ; and if  $A \leq C$ ,  $B \leq D$ .

First,  $A \succ C$ ; then  $A : B \succ C : B$  (8. 5.), but  $A : B :: C : D$ , therefore  $C : D \succ C : B$  (13. 5.), and therefore  $B \succ D$  (10. 5.)

In the same manner, it is proved, that if  $A = C$ ,  $B = D$ ; and if  $A \leq C$ ,  $B \leq D$ . Therefore, &c. Q. E. D.

### ১৩ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি পরিমাণ যদি তৃতী-  
য়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিম্পত্তির সমান হয় কিন্তু তৃতীয়ের চতুর্থ  
সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি যদি পঞ্চমের ষষ্ঠ সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি অপেক্ষা  
অধিক হয় তবে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিম্পত্তিও পঞ্চ-  
মের ষষ্ঠ সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি অপেক্ষা অধিক হইবে ।

যদি  $k : x :: g : y$  এবং  $g : y > g : z$  তবে  $k : x > g : z$  ।

$g : y > g : z$  হওয়াতে এমন দুই অঙ্ক যথা  $a$  এবং  $i$   
পাওয়া যাইবে যাহার গুণনে  $ag > iy$  কিন্তু  $az < ic$   
হইবে (৫।৭ নং) পরন্তু  $ag > iy$  হইলে  $ak > ix$   
হইবে কেননা  $k : x :: g : y$  অতএব  $ak > ix$  এবং  
 $az < ic$  সুতরাং  $k : x > g : z$  (৫।৭ নং) অতএব  
প্রথম রাশির ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

### ১৪ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিম্পত্তি যদি তৃতীয়ের চতুর্থ  
সম্বন্ধীয় নিম্পত্তির সমান হয় এবং প্রথম যদি তৃতীয় হইতে  
অধিক হয় তবে দ্বিতীয়ও চতুর্থ হইতে অধিক হইবে তথা যদি  
সমান হয় তবে সমান আর যদি ন্যূন হয় তবে ন্যূন হইবে ।

যদি  $k : x :: g : y$  তবে  $k > g$  হইলে  $x > y$ ,  
 $k = g$  হইলে  $x = y$ , এবং  $k < g$  হইলে  $x < y$  হইবে ।

প্রথমতঃ  $k > g$  কল্পনা কর তাহাতে  $k : x > g : y$   
 $x (৫।৮)$  কিন্তু  $k : x :: g : y$  অতএব  $g \cdot x > k \cdot y$   
(৫।১৩) সুতরাং  $x > y$  (৫।১০)

তদ্রূপ ইহাও উপপন্ন হয় যে  $k = g$  হইলে  $x = y$ ,  
এবং  $k < g$  হইলে  $x < y$  । অতএব প্রথম রাশির ইত্যাদি ।  
ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

## PROP. XV. THEOR.

*Magnitudes have the same ratio to one another which their equimultiples have.*

If A and B be two magnitudes, and m any number;  
 $A : B :: mA : mB$ .

Because  $A : B :: A : B$  (7. 5.);  $A : B :: A + A : B + B$  (12. 5.), or  $A : B :: 2A : 2B$ . And, in the same manner, since  $A : B :: 2A : 2B$ ,  $A : B :: A + 2A : B + 2B$  (12. 5.), or  $A : B :: 3A : 3B$ ; and so on, for all the equimultiples of A and B. Therefore, &c.  
 Q. E. D.

## PROP. XVI. THEOR.

*If four magnitudes of the same kind be proportionals, they will also be proportionals when taken alternately.*

If  $A : B :: C : D$ , then alternately,  $A : C :: B : D$ .  
 Take  $mA$ ,  $mB$  any equimultiples of A and B, and  $nC$ ,  $nD$  any equimultiples of C and D. Then (15. 5.)  $A : B :: mA : mB$ ; now  $A : B :: C : D$ , therefore (11. 5.)  $C : D :: mA : mB$ . But  $C : D :: nC : nD$  (15. 5.); therefore  $mA : mB :: nC : nD$  (11. 5.); wherefore if  $mA = nC$ ,  $mB = nD$  (14. 5.); if  $mA > nC$ ,  $mB > nD$ ; or if  $mA < nC$ ,  $mB < nD$ ; therefore (Def. 5. 5.)  $A : C :: B : D$ . Therefore, &c. Q. E. D.

### ১৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কতিপয় রাশির সম অপবর্ত্তার পরস্পর সময়ে যে নিষ্পত্তি রাশিরদেবুও সেই নিষ্পত্তি।

ক এবং খ দুই রাশি এবং অ কোন সংখ্যাত্মক অঙ্ক কল্পনা করা। ক : খ :: অক : অখ হইবে।

ক : খ :: ক : খ (৫৭) একারণ ক : খ :: ক + ক : খ + খ অর্থাৎ ক : খ :: ২ক : ২খ তথা ক : খ :: ক + ২ক : খ + ২খ অর্থাৎ ক : খ :: ৩ক : ৩খ। ক এবং খ রাশির যাবদীয় সম অপবর্ত্তার বিষয় তদ্রূপ হয়। অতএব কতিপয় রাশির ইত্যাদি। ইহাই এখানে উপপাদ্য।

### ১৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সজাতীয় চারি রাশি অমুপাতীয় হইলে তাহারদের বিনিময় নিষ্পত্তি সম্ভাব্য।

যদি ক : খ :: গ : ঘ তবে বিনিময়ে ক : গ :: খ : ঘ হইবে।

ক খ রাশির অক অখ দুই সম অপবর্ত্তা কল্পনা কর এবং গ ঘ রাশির ইগ ইঘ দুই সম অপবর্ত্তা কল্পনা কর তাহাতে (৫১৫) ক : খ :: অক : অখ হইবে, অপর ক : খ :: গ : ঘ একারণ (৫১১) গ : ঘ :: অক : অখ। অধিকন্তু গ : ঘ :: ইগ : ইঘ সুতরাং অক : অখ :: ইগ : ইঘ অতএব যদি অক > ইগ তবে অখ > ইঘ (৫১৪) যদি অক = ইগ তবে অখ = ইঘ অথবা যদি অক < ইগ তবে অখ < ইঘ অতএব (৫১৫) ক : গ :: খ : ঘ। ইহাই এখানে উপপাদ্য।



## PROP. XVII. THEOR.

*If Magnitudes, taken jointly, be proportionals, they will also be proportionals when taken separately; that is, if the first, together with the second, have to the second the same ratio which the third, together with the fourth, has to the fourth, the first will have to the second the same ratio which the third has to the fourth.*

If  $A + B : B :: C + D : D$ , then by division  
 $A : B :: C : D$ .

Take  $mA$  and  $nB$  any multiples of  $A$  and  $B$ , by the numbers  $m$  and  $n$ ; and first let  $mA > nB$ ; to each of them add  $mB$ , then  $mA + mB > mB + nB$ . But  $mA + mB = m(A + B)$  (Cor. 1. 5), and  $mB + nB = (m + n)B$  (2. Cor. 2. 5.), therefore  $m(A + B) > (m + n)B$ .

And because  $A + B : B :: C + D : D$ , if  $m(A + B) > (m + n)B$ ,  $m(C + D) > (m + n)D$ , or  $mC + mD > mD + nD$ , that is, taking  $mD$  from both,  $mC > nD$ . Therefore, when  $mA$  is greater than  $nB$ ,  $mC$  is greater than  $nD$ . In like manner, it is demonstrated, that if  $mA = nB$ ,  $mC = nD$ , and if  $mA < nB$ , that  $mC < nD$ ; therefore  $A : B :: C : D$ . (Def. 5. 5.)  
 Therefore, &c. Q. E. D.

## PROP. XVIII. THEOR.

*If magnitudes, taken separately, be proportionals, they will also be proportionals, when taken jointly, that is, if the first be to the second as the third to the*

### ১৭ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

যে২ রাশির মধ্যে যোগ নিষ্পত্তি থাকে তাহাদের মধ্যে অন্তর নিষ্পত্তি ও হইবে অর্থাৎ প্রথম এবং দ্বিতীয় রাশির যোগে দ্বিতীয়ের সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি তৃতীয় চতুর্থের যোগে চতুর্থ সম্বন্ধেও যদি সেই নিষ্পত্তি হয় তবে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হইবে।

যদি  $k + x : x :: g + y : y$  তবে বিয়োগ দ্বারা  $k : x :: g : y$ ।

ক এবং খ রাশির অ এবং ই পরিমাণ হই অপরন্ত্য কল্পনা কর অর্থাৎ অক ইখ। প্রথমতঃ অক  $>$  ইখ কল্পনা কর তাহাতে অখ যোগ করিলে অক + অখ  $>$  অখ + ইখ হইবে। অপর অক + অখ = অ (ক + খ) (৫।১ অহু) এবং অখ + ইখ = (অ + ই)খ (৫।২ দ্বিতীয় অহু) অতএব অ (ক + খ) = (অ + ই)খ।

অপিচ  $k + x : x :: g + y : y$  একারণ যদি অ (ক + খ)  $>$  (অ + ই)খ তবে অ (গ + য)  $>$  (অ + ই)য অর্থাৎ অগ + অয  $>$  অয + ইয। উভয়তঃ অয বিয়োগ করিলে অগ  $>$  ইয অতএব অক ইখ হইতে অধিক হইলে অগ ইয হইতে অধিক হয়। উল্লপ অক = ইখ হইলে অগ = ইয এবং অক  $<$  ইখ হইলে অগ  $<$  ইয উপপন্ন হইবে। অতএব  $k : x :: g : y$ । অতএব যে২ রাশির মধ্যে ইত্যাদি। ইহাই এক্ষণে উপপাদ্য।

### ১৮ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

যে২ রাশির মধ্যে অন্তর নিষ্পত্তি থাকে তাহাদের মধ্যে যোগ নিষ্পত্তিও হইবে অর্থাৎ যদি প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে প্রথম এবং দ্বিতীয়ের যোগে দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি

fourth, the first and second together will be to the second, as the third and fourth together to the fourth.

If  $A : B :: C : D$ , then, by composition,  $A + B : B :: C + D : D$ .

Take  $m(A + B)$  and  $nB$  any multiples whatever of  $A + B$  and  $B$ ; and first, let  $m$  be greater than  $n$ . Then, because  $A + B$  is also greater than  $B$ ,  $m(A + B) > nB$ . For the same reason,  $m(C + D) > nD$ . In this case, therefore, that is, when  $m > n$ ,  $m(A + B)$  is greater than  $nB$ , and  $m(C + D)$  is greater than  $nD$ . And in the same manner, it may be proved, that when  $m = n$ ,  $m(A + B)$  is greater than  $nB$ , and  $m(C + D)$  greater than  $nD$ .

Next, Let  $m < n$ , or  $n > m$ , then  $m(A + B)$  may be greater than  $nB$ , or may be equal to it, or may be less. first, let  $m(A + B)$  be greater than  $nB$ ; then also,  $m(A + B) > nB$ ; take  $mB$ , which is less than  $nB$ , from both, and  $m(A + B) > nB - mB$ , or  $m(A + B) > (n - m)B$  (6. 5.). But if  $m(A + B) > (n - m)B$ ,  $m(C + D) > (n - m)D$ , because  $A : B :: C : D$ . Now,  $(n - m)D = nD - mD$  (6. 5.), therefore  $m(C + D) > nD - mD$ , and adding  $mD$  to both,  $m(C + D) + mD > nD$ , that is (1. 5.),  $m(C + D) > nD$ . If, therefore,  $m(A + B) > nB$ ,  $m(C + D) > nD$ .

In the same manner, it may be proved, that  $n(A + B) > mB$ ,  $n(C + D) > mD$ ; and if  $m(A + B) = nB$ ,  $m(C + D) = nD$ ; therefore (Def. 6. 5.),  $A + B : B :: C + D : D$ . Therefore, &c. Q. E. D.

তৃতীয় এবং চতুর্থের যোগে চতুর্থ সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে।

যদি  $ক : খ :: গ : ঘ$  তবে সংযোগ দ্বারা  $ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ$ ।

ক + খ এবং খ রাশির অ (ক + খ) এবং ইখ দুই অপবর্ত্য কল্পনা করিয়া প্রথমতঃ অ ই হইতে অধিক কল্পনা কর তাহাতে ক + খ রাশি খ হইতে অধিক হওয়াতে অ (ক + খ)  $\rightarrow$  ইখ। ঐ কারণে অ (গ + ঘ)  $\rightarrow$  ইঘ অতএব অ  $\rightarrow$  ই হইলে অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে অধিক এবং অ (গ + ঘ) রাশি ইঘ হইতে অধিক হয়। তদ্রূপ অ = ই হইলে অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে এবং অ (গ + ঘ) রাশি ইঘ হইতে অধিক হয়।

অপিচ অ < ই অর্থাৎ ই  $\rightarrow$  অ কল্পনা কর তাহাতে অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে অধিক অথবা সূন অথবা তত্ত্বল্য হইবে। প্রথমতঃ অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে অধিক হউক তাহাতে অক + অখ  $\rightarrow$  ইখ। উভয়তঃ ইখ রাশির সূন অখ নিয়োগ করিলে অক  $\rightarrow$  ইখ — অখ অর্থাৎ অক  $\rightarrow$  (ই—অ) খ। অধিকন্তু যদি অক  $\rightarrow$  (অ—ই) খ তবে অগ  $\rightarrow$  (ই—অ) ঘ কেননা  $ক : খ :: গ : ঘ$ । অপর (ই—অ) = ইঘ — অঘ (৫।৬) অতএব অগ  $\rightarrow$  ইঘ — অঘ এবং উভয়তঃ অঘ যোগে অগ + অঘ  $\rightarrow$  ইঘ অর্থাৎ (৫।১) অ (গ + ঘ)  $\rightarrow$  ইঘ অতএব অ (ক + খ)  $\rightarrow$  ইখ হইলে অ (গ + ঘ)  $\rightarrow$  ইঘ হয়।

তদ্রূপ যদি অ (ক + খ) = ইখ তবে অ (গ + ঘ) = ইঘ উপপন্ন হইবে এবং যদি অ (ক + খ) < ইখ হয় তবে অ (গ + ঘ) < ইঘ উপপন্ন হইবে অতএব (৫।৫ নং)  $ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ$ । অতএব ঘের রাশির মধ্যে ইত্যাদি। ইহাই এক্ষণে উপপাদ্য।

## PROP. XIX. THEOR.

*If a whole magnitude be to a whole, as a magnitude taken from the first, is to a magnitude taken from the other; the remainder will be to the remainder as the whole to the whole.*

If  $A : B :: C : D$ , and if  $C$  be less than  $A$ ,  
 $A - C : B - D :: A : B$ .

Because  $A : B :: C : D$ , alternately (16. 5.),  $A : C :: B : D$ ; and therefore, by division (17. 5),  $A - C : C :: B - D : D$ . Wherefore, again, alternately,  $A - C : B - D :: C : D$ , but  $A : B :: C : D$ , therefore (11. 5.)  $A - C : B - D :: A : B$ . Therefore, &c. Q. E. D.

COR.  $A - C : B - D :: C : D$ .

## PROP. D. THEOR.

*If four magnitudes be proportionals, they are also proportionals by conversion, that is, the first is to its excess above the second, as the third to its excess above the fourth.*

If  $A : B :: C : D$ , by conversion,  
 $A : A - B :: C : C - D$ .

For, since  $A : B :: C : D$ , by division (17. 5.),  $A - B : B :: C - D : D$ , and inversely (A. 5.),  $B : A - B :: D : C - D$ ; therefore, by composition (18. 5.),  $A : A - B :: C : C - D$ . Therefore, &c. Q. E. D.

## ১৯ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কোন সমুদয় রাশির যদি অন্য কোন সমুদয় রাশি সম-  
কীয় নিষ্পত্তি প্রথম হইতে বিযুক্ত কোন রাশির দ্বিতীয়  
হইতে বিযুক্ত কোন রাশি সমকীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে  
সমুদয়ের পরস্পর নিষ্পত্তির ন্যায় অবশিষ্টেরও নিষ্পত্তি হই-  
বেক।

যদি ক : খ :: গ : ঘ এবং যদি গ ক হইতে ন্যূন হয় তবে  
ক—গ : খ—ঘ :: ক : খ।

ক : খ :: গ : ঘ একারণ (৫।১৬) বিনিময় নিষ্পত্তিতে  
ক : গ :: খ : ঘ সুতরাং অন্তর নিষ্পত্তিতে (৫।১৭) ক—  
গ : গ :: খ—ঘ : ঘ পুনশ্চ বিনিময় নিষ্পত্তিতে ক—গ :  
খ—ঘ :: গ : ঘ পরন্তু ক : খ :: গ : ঘ একারণ (৫।১১)  
ক—গ : খ—ঘ :: ক : খ। অতএব কোন সমুদয় রাশির  
ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান ক—গ : খ—ঘ :: গ : ঘ।

## ২০ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি রাশি অনুপাতীয় হইলে তাহার পরিবর্তনেও অনু-  
পাতীয় হইবে অর্থাৎ প্রথম রাশির দ্বিতীয় বিয়োগাব-  
শিষ্ট সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ বিয়োগাবশিষ্টেরও  
সেই নিষ্পত্তি হইবে।

যদি ক : খ :: গ : ঘ তবে পরিবর্তনে ক : ক—খ ::  
গ : গ—ঘ।

কেননা ক : খ :: গ : ঘ একারণ (৫।১৭) অন্তর নিষ্পত্তিতে  
ক—খ : খ :: গ—ঘ : ঘ এবং বিকোম নিষ্পত্তিতে (৫।ক) খ :  
ক—খ :: ঘ : গ—ঘ অতএব যোগ নিষ্পত্তিতে (৫।১৮) ক :  
ক—খ :: গ : গ—ঘ সুতরাং চারি রাশি ইত্যাদি। ইহাই  
এস্থলে উপপাদ্য।

Cor. In the same way, it may be proved, that  $A + B :: C : C + D$ .

### PROP. XX. THEOR.

*If there be three magnitudes, and other three, which, taken two and two, have the same ratio ; if the first be greater than the third, the fourth is greater than the sixth ; if equal, equal ; and if less, less.*

If there be three magnitudes, A, B, and C, and other three, D, E, and F ; and if  $A : B :: D : E$  ; and also  $B : C :: E : F$ , then if  $A > C$ ,  $D > F$  ; if  $A = C$ ,  $D = F$  ; and if  $A < C$ ,  $D < F$ .

A,	B,	C,
D,	E,	F.

First, Let  $A > C$  ; then  $A : B > C : B$  (8. 5.). But  $A : B :: D : E$ , therefore also  $D : E > C : B$  (13. 5.) Now  $B : C :: E : F$ , and inversely (A. 5.),  $C : B :: F : E$  ; and it has been shewn that  $D : E > C : B$ , therefore  $D : E > F : E$  (13. 5.), and consequently  $D > F$  (10. 5.)

Next, Let  $A = C$  ; then  $A : B :: C : B$  (7. 5.), but  $A : B :: D : E$  ; therefore,  $C : B :: D : E$ , but  $C : B :: F : E$ , therefore  $D : E :: F : E$  (11. 5.), and  $D = F$  (9. 5.) Lastly, let  $A < C$  ; then  $C > A$ , and because, as was already shewn,  $C : B :: F : E$ , and  $B : A :: E : D$  ;

অমুমান ঐ রূপে ক : ক + খ :: গ : গ + ঘ উপপন্ন  
হইবে ।

## ২০ প্রতিজ্ঞা ।

প্রথম পঙ্ক্তিতে তিন রাশি এবং দ্বিতীয় পঙ্ক্তিতে অপর তিন  
রাশি কল্পিত হইলে যদি ক্রমশ দুইই রাশির নিষ্পত্তি পরি-  
মাণ সমান হয় তবে প্রথম রাশি তৃতীয়ের অধিক হইলে চতুর্থ  
রাশিও ষষ্ঠের অধিক হইবে তথা সমান হইলে সমান এবং  
কমান হইলে কৃমান হইবে ।

যদি ক খ গ তিন রাশি এবং ঘ ও চ অপর তিন রাশি  
কল্পিত হয় এবং যদি ক : খ :: ঘ : ও  
তথা খ : গ :: ও : চ হয় তবে ক  $\rightarrow$  গ 

ক	খ	গ
ঘ	ও	চ

  
হইলে ঘ  $\rightarrow$  চ এবং ক = গ হইলে ঘ = চ আর ক < গ  
হইলে ঘ < চ হইবে ।

প্রথমতঃ ক  $\rightarrow$  গ কল্পনা কর তাহাতে (৫।৮) ক : খ  $\rightarrow$   
গ : খ কিন্তু ক : খ :: ঘ : ও সুতরাং (৫।১৩) ঘ : ও  $\rightarrow$   
গ : খ অপর খ : গ :: ও : চ এবং বিলোম নিষ্পত্তিতে (৫।ক)  
গ : খ :: চ : ও । অপর পূর্বের সপ্রমাণ হইয়াছে যে ঘ : ও  
 $\rightarrow$  গ : খ অতএব (৫।১৩) ঘ : ও  $\rightarrow$  চ : ও সুতরাং ঘ  $\rightarrow$   
চ (৫।১০) ।

অপিচ ক = গ কল্পনা কর তাহাতে ক : খ :: গ  
খ (৫।৭) কিন্তু ক : খ :: ঘ : ও অতএব গ : খ :: ঘ :  
ও অধিকন্তু গ : খ :: চ : ও অতএব ঘ : ও :: চ : ও  
(৫।১১) সুতরাং ঘ = চ । অবশেষে ক < গ কল্পনা কর  
তাহাতে গ  $\rightarrow$  ক হইবে । অপর পূর্বোক্ত প্রমাণানুসারে  
গ : খ :: চ : ও এবং খ : ক :: ও : ঘ সুতরাং প্রথম  
প্রকরণানুসারে যদি গ  $\rightarrow$  ক তবে চ  $\rightarrow$  ঘ অর্থাৎ ক < গ



therefore, by the first case, if  $C > A$ ,  $F > D$ , that is, if  $A < C$ ,  $D < F$ . Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. XXI. THEOR.

*If there be three magnitudes, and other three, which have the same ratio taken two and two, but in a cross order if the first magnitude be greater than the third, the fourth is greater than the sixth: if equal, equal; and if less, less.*

If there be three magnitudes,  $A, B, C$ , and other three,  $D, E$ , and  $F$ , such that  $A : B :: E : F$ , and  $B : C :: D : E$ ; if  $A > C$ ,  $D > F$ , if  $A = C$ ,  $D = F$ ; and if  $A < C$ ,  $D < F$ .

First, Let  $A > C$ . Then  $A : B > C : B$  (8. 5.), but  $A : B :: E : F$ , therefore  $E : F > C : B$  (13. 5.). Now,  $B : C :: D : E$ , and inversely,  $C : B :: E : D$ ; therefore  $E : F > E : D$  (13. 5.), wherefore  $D > F$  (10. 5.).

Next, Let  $A = C$ . Then (7. 5.)  $A : B :: C : B$ ; but  $A : B :: E : F$ , therefore,  $C : B :: E : F$  (11. 5.); but  $B : C :: D : E$ , and inversely,  $C : B :: E : D$ , therefore (11. 5.),  $E : F :: E : D$ , and, consequently,  $D = F$  (9. 5.).

Lastly, Let  $A < C$ . Then  $C > A$ , and, as was already proved,  $C : B :: E : D$ ; and  $B : A :: F : E$ , therefore, by the first case, since  $C > A$ ,  $F > D$ , that is,  $D < F$ . Therefore, &c. Q. E. D.

হইলে  $\varphi < \psi$  হইবে । অতএব যদি প্রথম পংক্তিতে ইত্যাদি ।  
ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

## ২১ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

যদি প্রথমতঃ তিন রাশি এবং দ্বিতীয়তঃ অপরাধিন রাশি  
কল্পিত হইলে বিপরীত মুখে দুইই রাশির সমান নিষ্পত্তি হয়  
তবে প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের অধিক হইলে চতুর্থ রাশিও ষষ্ঠের  
অধিক হইবে তথা সমান হইলে সমান এবং স্থান হইলে  
স্থান হইবে ।

যদি  $k, x, g$  তিন রাশি এবং  $\varphi, \psi, \psi$  অপরাধিন রাশি  
কল্পিত হয় এবং যদি  $k : x :: \psi : \psi$  এবং  $x : g :: \varphi :$   
ও হয় তবে  $k > g$  হইলে  $\varphi > \psi$  এবং  $k = g$  হইলে  
 $\varphi = \psi$  তথা  $k < g$  হইলে  $\varphi < \psi$  হইবে ।

প্রথমতঃ  $k > g$  কল্পনা কর তাহাতে

$k$	$x$	$g$
$\varphi$	$\psi$	$\psi$

$k : x > g : \psi$  (৫।৮) কিন্তু  $k : x :: \psi : \psi$  অতএব  
 $\psi : \psi > g : \psi$  (৫।১৩) অপরাধ :  $g :: \varphi : \psi$  সুতরাং  
বিলোম নিষ্পত্তিতে  $g : \psi :: \psi : \psi$  অতএব  $\psi : \psi >$   
 $\psi : \psi$  (৫।১৩) একারণ  $\varphi > \psi$  (৫।১০)

দ্বিতীয়তঃ  $k = g$  কল্পনা কর তাহাতে  $k : x :: g : \psi$   
(৫।৭) কিন্তু  $k : x :: \psi : \psi$  অতএব  $g : \psi :: \psi :$   
(৫।১১) অপরাধ :  $g :: \varphi : \psi$  এবং বিলোম নিষ্পত্তিতে  
 $g : \psi :: \psi : \psi$  অতএব (৫।১১)  $\psi : \psi :: \psi : \psi$   
 $= \psi$  ।

অবশেষে  $k < g$  কল্পনা কর তাহাতে  $g > k$  হইবে এবং  
পূর্বে প্রমাণাত্মকভাবে  $g : \psi :: \psi : \psi$  এবং  $x : k :: \varphi :$   
সুতরাং প্রথম একরকম প্রমাণ  $g > k$  হওয়াতে  $\psi > \varphi$   
অর্থাৎ  $\varphi < \psi$  । অতএব যদি প্রথমতঃ ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে  
উপপাদ্য ।

## PROP. XXII. THEOR.

*If there be any number of magnitudes, and as many others, which, taken two and two in order, have the same ratio; the first will have to the last of the first magnitudes, the same ratio which the first of the others has to the last.\**

First, Let there be three magnitudes, A, B, C, and other three, D, E, F, which, taken two and two in order, have the same ratio, viz.  $A : B :: D : E$ , and  $B : C :: E : F$ ; then  $A : C :: D : F$ .

Take of A and D any equimultiples whatever,  $mA$ ,  $mD$ ; and of B and E any whatever,  $nB$ ,  $nE$ ; and of C and F any whatever,  $qC$ ,  $qF$ . Because  $A : B :: D : E$ ,  $mA : nB :: mD : nE$  (4. 5.); and for the same reason,  $nB : qC :: nE : qF$ . Therefore (20. 5.), according as  $mA$  is greater than  $qC$ , equal to it, or less,  $mD$  is greater than  $qF$ , equal to it, or less; but  $mA$ ,  $mD$  are any equimultiples of A and D; and  $qC$ ,  $qF$  are any equimultiples of C and F; therefore (Def. 5. 5.),  $A : C :: D : F$ .

A,	B,	C,
D,	E,	F
$mA$ ,	$nB$ ,	$qC$
$mD$ ,	$nE$ ,	$qF$

Again, Let there be four magnitudes, and other four which, taken two and two in order, have the same ratio, viz.  $A : B :: E : F$ ;  $B : C :: F : G$ ;  $C : D :: G : H$ . then  $A : D :: E : H$ .

\* N. B. This proposition is usually cited by the words "ex æquo," or "ex æquo."

## ২২ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য ।

প্রথমতঃ কতিপয় রাশি এবং দ্বিতীয়তঃ তৎসংখ্যক অপর কতিপয় রাশি থাকিলে যদি ক্রমশঃ দুইই রাশির মধ্যে সমান নিষ্পত্তি হয় তবে প্রথম শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সহস্রকে যে নিষ্পত্তি দ্বিতীয় শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সহস্রকেও সেই নিষ্পত্তি হইবে \* ।

যদি ক খ গ তিন রাশি এবং ঘ ও চ অপর তিন রাশির মধ্যে ক্রমশঃ দুইই করিয়া জইলে সমান নিষ্পত্তি হয় অর্থাৎ যদি ক : খ :: ঘ : ও এবং খ : গ :: ও : চ তবে ক : গ :: ঘ : চ । ক এবং ঘ রাশির অক অঘ দুই সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং খ ও গ রাশির ইখ ও ইগ দুই সম অপবর্ত্ত্য তথা গ ও চ রাশির উগ ও উচ দুই সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর ।

ক : খ :: ঘ : ও	অক ইখ উগ
খ : গ :: ও : চ	অঘ ইউ উচ

একারণ অক : ইখ :: অঘ : ইউ (৫।১৩)

তদ্রূপ ইখ : উগ :: ইউ : উচ । অতএব (৫।২০) অক রাশি উগ রাশির সূন্যাতিরিক্ত অথবা সমান হইলে অঘ রাশি উচ রাশিরও সূন্যাতিরিক্ত অথবা সমান হইবে কিন্তু অক অঘ ক এবং ঘ রাশির সম অপবর্ত্ত্য এবং উগ উচ গ এবং চ রাশির সম অপবর্ত্ত্য সূত্রানুসারে (৫।৫সং) ক : গ :: ঘ : চ । অপিচ দুই শ্রেণীস্থ চারিই রাশি কল্পিত হউক বাহ্যরদের দুইই করিয়া গ্রহণ করিলে পরস্পর ক্রমশঃ সমান নিষ্পত্তি হয় ।

যথা ক : খ :: ও : চ এবং খ : গ :: ও : চ ক খ গ ঘ : ই ও গ : ঘ :: ই : অ তাহাতে ক : ঘ :: ও : চ ই অ : ও : অ উপপন্ন হইবে ।

\* এই প্রতিজ্ঞা “ নামান্যন্তঃ ” এই শব্দে উক্ত হইয়া থাকে ।

For since  $A, B, C$ , are three magnitudes, and  $E, F, G$ , other three,  $A, B, C, D$ , which, taken two and two, have the same ratio, by the foregoing case,  $A : C :: E : G$ . And because also  $C : D :: G : H$ , by that same case,  $A : D :: E : H$ . In the same manner is the demonstration extended to any number of magnitudes. Therefore, &c.  $Q. E. D.$

### PROP. XXIII. THEOR.

*If there be any number of magnitudes, and as many others, which, taken two and two, in a cross order, have the same ratio: the first will have to the last of the first magnitudes the same ratio which the first of the others has to the last\**

First, Let there be three magnitudes,  $A, B, C$ , and other three,  $D, E$ , and  $F$ , which taken two and two in a cross order, have the same ratio, viz.  $A : B :: E : F$ , and  $B : C :: D : E$ , then  $A : C :: D : F$ .

Take of  $A, B$ , and  $D$ , any equimultiples  $mA, mB, mD$ ; and of  $C, E, F$ , any equimultiples  $nC, nE, nF$ .

Because  $A : B :: E : F$ , and because also  $A : B :: mA : mB$  (15. 5.), and  $E : F :: nE : nF$ ; therefore,  $mA : mB :: nE : nF$  (11. 5.). Again, because  $B : C :: D : E$ ,  $mB : nC :: mD : nE$  (4. 5.): and it has been just shewn, that  $mA : mB :: nE : nF$ ; therefore, if  $mA > nC$ ,  $mD > nF$  (21. 5.); if  $mA = nC$ ,  $mD = nF$ ; and if  $mA < nC$ ,

\* N. B.—This proposition is usually cited by the words “*ex æquali in proportionibus Perturbata*”; or, “*ex æquo in-vertendo*.”

কেমনা ক খ গ এবং ঙ চ ছ দুই শ্রেণীস্থ তিন২ রাশির মধ্যে দুই২ গ্রহণ করিলে সমান নিষ্পত্তি হয় একারণ পূর্বোক্ত প্রকরণানুসারে ক : গ :: ঙ : ছ এবং গ : ঘ :: ছ : জ ইত্য-  
 যাতে ঐ প্রকরণানুসারে ক : ঘ :: ঙ : জ । এবং রাশির সংখ্যা যত হউক উপপত্তি ঐরূপ হইবে । অতএব যদি প্রথমত : ইত্যাদি । ইহাই গ্রন্থে উপপাদ্য ।

## ২৩ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

যদি সমান সংখ্যক কতিপয় রাশি দুই শ্রেণীস্থ হইলে বিপরীত ক্রমে দুই২ করিয়া লইলে পরস্পর সমান নিষ্পত্তি হয় তবে প্রথম শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি দ্বিতীয় শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে\* ।

প্রথমতঃ ক খ গ এবং ঘ ঙ চ দুই শ্রেণীস্থ তিন২ রাশি কল্পিত হউক যাহাদের বিপরীত ক্রমে দুই২ করিয়া লইলে পরস্পর সমান নিষ্পত্তি হয়  
 অর্থাৎ ক : খ :: ঙ : চ এবং খ : অক অথ ইগ  
 গ :: ঘ : ঙ তাহাতে ক : গ :: অঘ ইঙ ইচ  
 ঘ : চ উপপন্ন হইবে

ক খ ঘ রাশির অক অথ অঘ সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং গ ঙ চ রাশির ইগ ইঙ ইচ সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর ।

ক : খ :: ঙ : চ এবং ক : খ :: অক : অথ (৫।১৫)  
 তথা ঙ : চ :: ইঙ : ইচ একারণ অক : অথ :: ইঙ : ইচ  
 (৫।১১) পুনশ্চ খ : গ :: ঘ : ঙ একারণ অথ : ইগ :: অঘ : ইঙ (৫।৪) এবং সম্পত্তি উপপন্ন হইয়াছে অক : অথ : ইঙ :

\* এই প্রতিজ্ঞা “বিপরীতক্রমে সামান্যতঃ” এই শব্দে উক্ত হইয়া থাকে ।

$mD \leq nF$ . Now,  $mA$  and  $mD$  are any equimultiples of  $A$  and  $D$ ,  $nC$ ,  $nF$ , any equimultiples of  $C$  and  $F$ ; therefore,  $A : C :: D : F$  (Def. 5. 5.).

Next, Let there be four magnitudes,  $A, B, C$ , and  $D$ , and other four,  $E, F, G$  and  $H$ , which, taken two and two, in a cross order, have the same ratio, viz.  $A : B :: G : H$ ;  $B : C :: A : E$ ,  $F : G$ , and  $C : D :: E : F$ , then  $A : D :: E : H$ . For, since  $A, B, C$  are three magnitudes and  $F, G, H$ , other three, which, taken two and two, in a cross order, have the same ratio, by the first case,  $A : C :: F : H$ . But  $C : D :: E : F$ , therefore, again, by the first case,  $A : D :: E : H$ . In the same manner, may the demonstration be extended to any number of magnitudes. Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. XXIV. THEOR.

*If the first has to the second the same ratio which the third has to the fourth; and the fifth to the second, the same ratio which the sixth has to the fourth; the first and fifth, together, shall have to the second, the same ratio which the third and sixth together, have to the fourth.*

Let  $A : B :: C : D$ , and also  $E : B :: F : D$ ; then  $A + E : B :: C + F : D$ .

Because  $E : B :: F : D$ , by inversion,  $B : E :: D : F$ . But, by hypothesis,  $A : B :: C : D$ , therefore, ex aequali (22. 5.),  $A : E :: C : F$ , and, by composition (18. 5.),  $A + E : E :: C + F : F$ . And again, by hypo-

ইচ অতএব অক  $\rightarrow$  ইগ হইলে অঘ  $\rightarrow$  ইচ হইবে (৫।২১)  
এবং অক = ইগ হইলে অঘ = ইচ তথা অক  $<$  ইগ হইলে  
অঘ  $<$  ইচ হইবে অপর অক অঘ ক এবং ঘ রাশির সম  
অপবর্ত্তা এবং ইগ ইচ গ এবং চ রাশির সম অপবর্ত্তা অতএব  
ক : গ :: ঘ : চ (৫।৫ সং) ।

অপিচ ক খ গ ঘ এবং ঙ চ ছ জ দুই শ্রেণীস্থ চারিই রাশি  
কল্পিত হউক বাহারদের বিপরীত ক্রমে দুই করিয়া লইলে  
পরস্পর সমান নিষ্পত্তি হয়। যথা ক : খ :: ছ : জ । খ :  
গ :: চ : ছ । গ : ঘ :: ঙ : চ । তাহাতে

ক	খ	গ	ঘ
ক	ঘ	ঙ	জ

উপপন্ন হইবে। কেননা

ক খ গ এবং চ ছ জ দুই শ্রেণীস্থ তিন রাশির মধ্যে বিপরীত  
ক্রমে দুই করিয়া লইলে সমান নিষ্পত্তি হয় একারণ প্রথম  
প্রকরণানুসারে ক : গ :: চ : জ অধিকন্তু গ : ঘ :: ঙ : চ  
অতএব পুনশ্চ প্রথম প্রকরণানুসারে ক : ঘ :: ঙ : জ ।  
এবং রাশির সংখ্যা যত হউক উপপত্তি ঐ রূপ হইবে ।

## ২৪ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

প্রথম রাশির যদি দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ  
সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় এবং পঞ্চমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয়  
নিষ্পত্তি যদি ষষ্ঠের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে  
প্রথম এবং পঞ্চমের একত্র যোগে দ্বিতীয়ের সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি  
তৃতীয় এবং ষষ্ঠের যোগে চতুর্থের সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি  
হইবে ।

যদি ক : খ :: গ : ঘ এবং ঙ : ঘ :: চ : ঘ কল্পিত  
হয় তবে ক + ঙ : খ :: গ + চ : ঘ ।

ঙ : খ :: চ : ঘ অতএব বিলোম নিষ্পত্তিতে খ : ঙ :: ঘ :  
চ অপর ক : খ :: গ : ঘ কল্পিত হইয়াছে অতএব সামান্যতঃ  
(৫।২২) ক : ঙ :: গ : চ এবং যোগ নিষ্পত্তিতে (৫।১৮)



thesis,  $E : B :: F : D$ , therefore, ex æquali (22. 5.),  
 $A + E : B :: C + F : D$ . Therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. E. THEOR.

*If four magnitudes be proportionals, the sum of the first two is to their difference as the sum of the other two to their difference.*

Let  $A : B :: C : D$ ; then if  $A > B$ ,  
 $A + B : A - B :: C + D : C - D$ ; or if  $A < B$ ,  
 $A + B : B - A :: C + D : D - C$ ,

For, if  $A > B$ , then because  $A : B :: C : D$ , by division (17. 5.),  $A - B : B :: C - D : D$ , and by inversion (A. 5.),  $B : A - B :: D : C - D$ . But, by composition (18. 5.)  $A + B : B :: C + D : D$ , therefore, ex æquali (22. 5.),  $A + B : A - B :: C + D : C - D$ .

In the same manner, if  $B > A$ , it is proved, that  
 $A + B : B - A :: C + D : D - C$ . Therefore, &c.  
 Q. E. D.

### PROP. F. THEOR.

*Ratios which are compounded of equal ratios, are equal to one another.*

Let the ratios of  $A$  to  $B$ , and, of  $B$  to  $C$ , which compound the ratio of  $A$  to  $C$ , be equal, each to each, to the ratios of  $D$  to  $E$ , and  $E$  to  $F$ , which compound the ratio of  $D$  to  $F$ ;  $A : C :: D : F$ .

ক + ও : ও :: গ + চ : চ। পুনশ্চ ও : খ :: চ : ঘ কল্পিত  
হইয়াছে অতএব সামান্যতঃ ক + ও : খ :: গ + চ : ঘ  
অতএব প্রথম রাশির ইত্যাদি ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

### ঙ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি অমুপাতীয় রাশির প্রথমোক্ত দুই রাশির পরস্পর  
যোগ বিয়োগ করিলে সমুদয়ের অবশিষ্ট সম্বন্ধে যে নিস্পত্তি  
অপর দুই রাশির ঐরূপ যোগ বিয়োগ করিলে সমুদয়ের  
অবশিষ্ট সম্বন্ধেও সেই নিস্পত্তি হইবে।

ক : খ :: গ : ঘ কল্পনা কর তাহাতে যদি  $k > x$  হয়  
তবে  $k + x : k - x :: g + y : g - y$  অথবা  $k < x$   
হইলে  $k + x : x - k :: g + y : y - g$ ।

কেননা যদি  $k > x$  তবে ক : খ :: গ : ঘ একারণ  
(৫১৭) অন্তর নিস্পত্তিতে  $k - x : x :: g - y : y$  সুত-  
রাং বিলোম নিস্পত্তিতে (৫১ক)  $x : k - x :: y : g - y$   
অধিকন্তু যোগ নিস্পত্তিতে (৫১৮)  $k + x : x :: g + y : y$   
অতএব সামান্যতঃ (৫১২২)  $k + x : k - x :: g + y : g - y$  এবং  $k < x$  হইলে তদ্রূপ  $k + x : x - k :: g + y : y - g$  উপপন্ন হইবে। অতএব চারি অমুপাতীয়  
ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

### চ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান নিস্পত্তি বোলে যে নিস্পত্তি হয় তাহাও  
পরস্পর সমান।

ক এবং খ ও খ এবং গ সম্বন্ধীয় নিস্পত্তির যোগে ক এবং  
গ সম্বন্ধীয় নিস্পত্তি উপপন্ন হইতেছে এবং ঘ এবং ও ও ও  
এবং চ সম্বন্ধীয় নিস্পত্তি বোলে ঘ এবং চ সম্বন্ধীয় নিস্পত্তি  
উপপন্ন হইতেছে যদি ক রাশির খ সম্বন্ধীয় এবং খ রাশির গ

For, first, If the ratio of A to B be equal to that of D to E, and the ratio of B to C equal to that of E to F, *ex æquali* (22. 5.),  $A : C :: D : F$ ,

A,	B,	C,
D,	E,	F,

And next, If the ratio of A to B be equal to that of E to F, and the ratio of B to C equal to that of D to E, *ex æquali inversely* (23. 5.),  $A : C :: D : F$ . In the same manner, may the proposition be demonstrated, whatever be the number of ratios. Therefore, &c. Q. E. D.

---

সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক্রমশঃ য রাশির ও সম্বন্ধীয় এবং ও রাশির  
চ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সমান হয় তবে ক : গ :: ঘ : চ।

কেননা প্রথমতঃ যদি ক রাশির ঋ সম্বন্ধীয় ক ঋ গ  
নিষ্পত্তি য রাশির ও সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য য ও চ  
হয় এবং ঋ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ও রাশির চ সম্বন্ধীয়  
নিষ্পত্তির তুল্য হয় তবে সামান্যতঃ (৫১২২) ক : গ ::  
ঘ : চ।

দ্বিতীয়তঃ যদি ক রাশির ঋ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ও রাশির  
চ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির তুল্য হয় এবং ঋ রাশির গ সম্বন্ধীয়  
নিষ্পত্তি য রাশির ও সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সমান হয় তবে  
(৫১২৩) বিপরীত ক্রমে সামান্যতঃ ক : গ :: ঘ : চ। অপর  
যত নিষ্পত্তি হউক উপপত্তি এই রূপ হইবে। অতএব সমানঃ  
নিষ্পত্তি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

পঞ্চমোধ্যায়ঃ সমাপ্তঃ

## BOOK VI.

### DEFINITIONS.

- I. **SIMILAR rectilineal figures** are those which have their several angles equal, each to each, and the sides about the equal angles proportionals.



- II. Two sides of one figure are said to be *reciprocally proportional* to two sides of another, when one of the sides of the first is to one of the sides of the second, as the remaining side of the second is to the remaining side of the first.

- III. A straight line is said to be cut in *extreme and mean ratio*, when the whole is to the greater segment, as the greater segment is to the less.

- IV. The *altitude* of any figure is the straight line drawn from its vertex perpendicular to its base.



## ৬ অধ্যায় ।

সংজ্ঞা ।

১ ক্ষেত্র সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের কোণ সকল ক্রমশঃ সমান এবং সমান কোণ সং-

লগ্ন বাহু পরস্পর অমু-  
পাতীয় সে সকল ক্ষেত্র-  
কে সদৃশ কহা যায় ।



২ দুই ক্ষেত্রের মধ্যে প্রথমের এক বাহু দ্বিতীয়ের এক বাহুর সহিত যে নিষ্পত্তি যুক্ত হয় দ্বিতীয়ের অপর বাহু প্রথমের অপর বাহুর সহিত যদি সেই নিষ্পত্তি যুক্ত হয় তবে প্রথমের দুই বাহুকে দ্বিতীয়ের দুই বাহুর সহিত “উত্তমতঃ অমুপাতীয়” কহা যায় ।

৩ কোন সরল রেখার সমুদায়াংশ যথা বৃহত্তর খণ্ডের সময়ে বৃহত্তর খণ্ড তথা লঘুতরের সময়ে কল্পিত হইলে ঐ সরল রেখাকে অন্ত্য এবং মধ্য অমুপাতীয় রূপে হিয় কহা যায় ।

৪ কোন ক্ষেত্রের শৃঙ্গ হইতে ভূমি পর্যন্ত লম্ব পাতি করিলে সেই লম্বকে ক্ষেত্রের উন্নতি কহা যায় ।

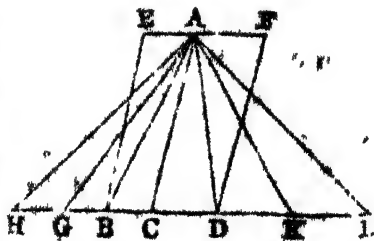


## PROP. I. THEOR.

*Triangles and parallelograms, of the same altitude, are one to another as their bases.*

Let the triangles  $ABC$ ,  $ACD$ , and the parallelograms  $EC$ ,  $CF$  have the same altitude, viz. the perpendicular drawn from the point  $A$  to  $BD$ : Then, as the base  $BC$  is to the base  $CD$ , so is the triangle  $ABC$  to the triangle  $ACD$ , and the parallelogram  $EC$  to the parallelogram  $CF$ .

Produce  $BD$  both ways to the points  $H$ ,  $L$ , and take any number of straight lines  $BG$ ,  $GH$ , each equal to the base  $BC$ ; and  $DK$ ,  $KL$ , any number of them, each equal to the base  $CD$ ; and join  $AG$ ,  $AH$ ,  $AK$ ,  $AL$ . Then, because  $CB$ ,  $BG$ ,  $GH$  are all equal, the triangles  $AHG$ ,  $AGB$ ,  $ABC$  are all equal (39. 1.). Therefore, whatever multiple the base  $HC$  is of the base  $BC$ , the same multiple is the triangle  $AHC$  of the triangle  $ABC$ . For the same reason, whatever multiple the base  $LC$  is of the base  $CD$ , the same multiple is the triangle  $ALC$  of the triangle  $ADC$ . But if the base  $HC$  be equal to the base  $LC$ , the triangle  $AHC$  is also equal to the triangle  $ALC$  (38. 1.); and if the base  $HC$  be



greater than the base  $LC$ , likewise the triangle  $AHC$  is greater than the triangle  $ALC$ ; and if less, less. Therefore, since there are four magnitudes, viz. the two bases  $BC$ ,  $CD$ , and the two triangles  $ABC$ ,  $ACD$ ; and of the base  $BC$  and the triangle  $ABC$ , the first and third, any equimultiples whatever have been taken, viz. the base

## ১ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজ এবং সমানান্তরাল ক্ষেত্রের উন্নতি রেখা এক হইলে তাহারদের ভূমির পরিমাণে পরস্পর সমুপাত হয়।

কখন কখন ত্রিভুজ এবং গঠ গঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্র সমান উন্নত অর্থাৎ কচিছু হইতে খব পর্য্যন্ত লম্বপাত করিলে সেই লম্ব তাহারদের স।

মান্য উন্নতি হ-

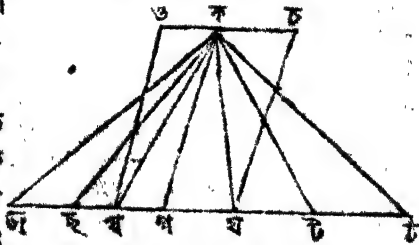
ইবে। অতএব খগ

ভূমি গঘ সহিত

যে নিম্পত্তি যুক্ত

কখন ত্রিভুজ কখন

ত্রিভুজের এবং গঠ



সমানান্তরাল ক্ষেত্র গঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সহিত সেই নিম্পত্তি যুক্ত।

খব রেখাকে উন্নত পার্শ্ব জ এবং ঠ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং খগ ভূমির সমান খছ ছজ রেখা ছেদ কর তথা গঘ ভূমির সমান ঘট টঠ রেখা ছেদ কর এবং কছ কজ কট কঠ সংযুক্ত কর। অপর গখ খছ ছজ পরস্পর সমান হওয়াতে কখন কখন কজছ ত্রিভুজ সকল পরস্পর সমান (১৩৮) অতএব জগ রেখা যৎপরিমাণে খগ রেখার অপবর্ত্য কখন ত্রিভুজও সেই পরিমাণে কখন ত্রিভুজের অপবর্ত্য। তদ্রূপ গঠ রেখা যৎপরিমাণে গঘ রেখার অপবর্ত্য কঠগ ত্রিভুজও সেই পরিমাণে কগঘ ত্রিভুজের অপবর্ত্য। অধিকন্তু জগ ভূমি গঠ ভূমির সমান হইলে কজগ ত্রিভুজও কগঠ ত্রিভুজের সমান হইবে (১৩৮) এবং জগ গঠ ভূমির অধিক হইলে কজগ ত্রিভুজও কগঠ ত্রিভুজের অধিক হইবে তথা ভূমি স্থান হইলে ত্রিভুজও স্থান হইবে। খগ গঘ দুই ভূমি এবং কখন কগঘ দুই ত্রিভুজ এই চারি রাশির মধ্যে প্রথম এবং তৃতীয়ের



HC, and the triangle AHC; and of the base CD and triangle ACD; the second and fourth, have been taken any equimultiples ~~whatever~~, viz. the base CL and triangle ALC; and, since it has been shewn, that if the base HC be greater than the base CL, the triangle AHC is greater than the triangle ALC; and if equal, equal; and if less, less. Therefore (Def. 5. 5.), as the base BC is to the base CD, so is the triangle ABC to the triangle ACD.

And because the parallelogram CE is double the triangle ABC (41. 1.), and the parallelogram CF double the triangle ACD, and because magnitudes have the same ratio which their equimultiples have (15. 5.), as the triangle ABC is to the triangle ACD, so is the parallelogram EC to the parallelogram CF. And because it has been shewn, that, as the base BC is to the base CD, so is the triangle ABC to the triangle ACD, and as the triangle ABC to the triangle ACD, so is the parallelogram EC to the parallelogram CF; therefore, as the base BC is to the base CD, so is (11. 5.) the parallelogram EC to the parallelogram CF. Wherefore, "*triangles,*" &c. Q. E. D.

*Cor.* From this it is plain, that *triangles and parallelograms that have equal altitudes, are to one another as their bases.*

(অর্থাৎ খগ ভূমি এবং কখগ ত্রিভুজের) জগ এবং কজগ সম  
অপবর্ত্ত্য এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের অর্থাৎ গঘ ভূমির ও কগঘ  
ত্রিভুজের গঠ এবং কগঠ সম অপবর্ত্ত্য কল্পিত হইয়াছে এবং  
এমত উপপন্ন হইয়াছে যে জগ ভূমি গঠ ভূমির অধিক হইলে  
কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজের অধিক হইবে ও জগ গঠ সমান  
হইলে কজগ কগঠ সমান হইবে তথা ভূমি সূন্য হইলে ত্রিভু-  
জও সূন্য হইবে অতএব (৫।৫ সং) খগ ভূমি গঘভূমির  
সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তিযুক্ত কখগ ত্রিভুজও কগঘ ত্রিভুজের সম্বন্ধে  
সেই নিষ্পত্তি বিশিষ্ট ।

অপিচ গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ  
এবং গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কগঘ ত্রিভুজের দ্বিগুণ (১।৪১)  
এবং কতিপয় রাশির সম অপবর্ত্ত্যের পরস্পর সম্বন্ধে যে  
নিষ্পত্তি রাশিদিগের পরস্পর সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি (৫।১৫)  
অতএব কখগ ত্রিভুজ কগঘ ত্রিভুজের সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি  
বিশিষ্ট গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের  
সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি বিশিষ্ট । অপর পূর্বে উপপন্ন  
হইয়াছে যে খগ ভূমি গঘ ভূমির সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি  
ধারণ করে কখগ ত্রিভুজও কগঘ ত্রিভুজের সম্বন্ধে সেই  
নিষ্পত্তি ধারণ করে এবং কখগ ত্রিভুজ কগঘ ত্রিভুজের  
সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি বিশিষ্ট গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গচ সমা-  
নান্তরাল ক্ষেত্রের সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি যুক্ত অতএব (৫।১১)  
খগ ভূমি গঘ ভূমির সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি ধারণ করে গঙ সমা-  
নান্তরাল ক্ষেত্রও গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি  
ধারণ করে । অতএব ত্রিভুজ ইত্যাদি । ইহাই এখানে উপ-  
পাদ্য ।

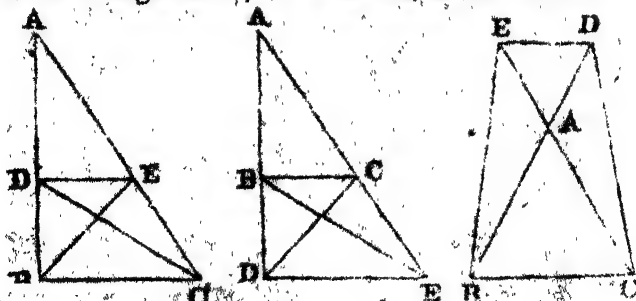
অনুমান । ইহাতে নিশ্চয় বোধ হইতেছে যে ত্রিভুজ  
এবং সমানান্তরাল ক্ষেত্রের উন্নতি সমান হইলে তাহারদের  
ভূমির পরিমাণে পরস্পর অনুপাত হয় ।

Let the figures be placed so as to have their bases in the same straight line; and having drawn perpendiculars from the vertices of the triangles to the bases, the straight line which joins the vertices is parallel to that in which their bases are (33. 1.), because the perpendiculars are both equal and parallel to one another. Then, if the same construction be made as in the proposition, the demonstration will be the same.

### PROP. II. THEOR.

*If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the other sides, or the other sides produced, proportionally: And if the sides, or the sides produced, be cut proportionally, the straight line which joins the points of section will be parallel to the remaining side of the triangle.*

Let DE be drawn parallel to BC, one of the sides of the triangle ABC; BD is to DA, as CE to EA.



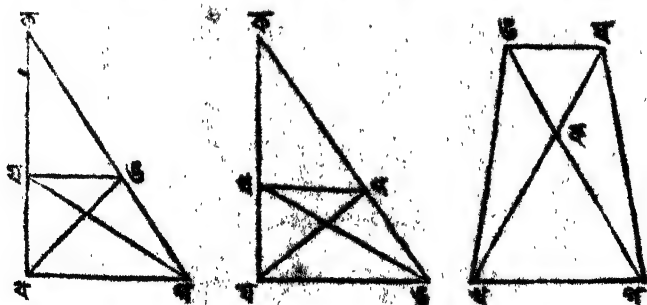
Join BE, CD; then the triangle BDE is equal to the triangle CDE (37. 1.), because they are on the

ত্রিভুজ এবং সমানান্তরাল ক্ষেত্র এমনত করিয়া স্থাপন কর যে তাহারদের ভূমি এক সরল রেখায় থাকে এবং ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্বপাত কর তাহাতে শূন্য সংযোজক রেখা ভূমির সমানান্তরাল হইবে (১১৩৩) কেননা লম্ব রেখা সকলি সমান ও সমানান্তরাল। পরে পূর্ববৎ অঙ্কপাত করিলে উপপত্তিও তাদৃশী হইবে।

## ২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের এক বাহুর সমানান্তরাল ভাবে সরল রেখা নিক্ষেপ করিলে তাহা ত্রিভুজের মধ্যে অন্য দুই বাহুকে অথবা ত্রিভুজের বাহুরে, বর্দ্ধিত দুই বাহুকে অমুপাতীয় রূপে ছেদ করিবে, এবং দুই বাহু ত্রিভুজের মধ্যে অথবা বাহুরে অমুপাতীয় রূপে ছিন্ন হইলে ছেদ চিহ্ন সংযোজক রেখা অবশিষ্ট বাহুর সমানান্তরাল হইবে।

কখনও ত্রিভুজের খগ বাহুর সমানান্তরাল ভাবে যন্ত রেখা কল্পিত হউক খঘ রেখার বক সহিত যৎপরিমাণে নিম্পত্তি গঙ রেখার ওক সহিত সেই পরিমাণে নিম্পত্তি হইবে।



খঙ গঘ সংযুক্ত কর ক্ষতএব খঘঙ এবং গঘঙ দুই ত্রিভুজ যন্ত এক ভূমির উপরিস্থ এবং খগ যন্ত সমানান্তরাল রেখার

same base  $DE$ , and between the same parallels  $DE$ ,  $BC$  : but  $ADE$  is another triangle, and equal magnitudes have, to the same, the same ratio (7. 5.) ; therefore, as the triangle  $BDE$  to the triangle  $ADE$ , so is the triangle  $CDE$  to the triangle  $ADE$  ; but as the triangle  $BDE$  to the triangle  $ADE$ , so is (1. 6.)  $BD$  to  $DA$ , because, having the same altitude, viz. the perpendicular drawn from the point  $E$  to  $AB$ , they are to one another as their bases ; and, for the same reason, as the triangle  $CDE$  to the triangle  $ADE$ , so is  $CE$  to  $EA$ . Therefore, as  $BD$  to  $DA$ , so is  $CE$  to  $EA$  (11. 5.).

Next, let the sides  $AB$ ,  $AC$  of the triangle  $ABC$ , or these sides produced; be cut proportionally in the points  $D$ ,  $E$  ; that is, so that  $BD$  be to  $DA$ , as  $CE$  to  $EA$ , and join  $DE$  ;  $DE$  is parallel to  $BC$ .

The same construction being made, because as  $BD$  to  $DA$ , so is  $CE$  to  $EA$  ; And as  $BD$  to  $DA$ , so is the triangle  $BDE$  to the triangle  $ADE$  (1. 6.) ; And as  $CE$  to  $EA$ , so is the triangle  $CDE$  to the triangle  $ADE$  ; therefore the triangle  $BDE$  is to the triangle  $ADE$ , as the triangle  $CDE$  to the triangle  $ADE$  ; that is, the triangles  $BDE$ ,  $CDE$  have the same ratio to the triangle  $ADE$  ; and therefore (9. 5.) the triangle  $BDE$  is equal to the triangle  $CDE$  : And they are on the same base  $DE$  ; but equal triangles on the same base are between the same parallels (39. 1.) ; there-

মধ্যস্থ হওয়াতে তাহার পরস্পর সমান (১৩৭) অধিকন্তু  
কথও অন্য এক ত্রিভুজ এবং সমান২ রাশির সামান্য রাশির  
সম্বন্ধে সমান নিষ্পত্তি হয় (৫৭) অতএব যৎপরিমাণে খঘও  
ত্রিভুজের কথও সহিত নিষ্পত্তি গঘও ত্রিভুজের কথও সহিত  
সেই পরিমাণে নিষ্পত্তি হইবে কিন্তু খঘও ত্রিভুজের কথও  
সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘক রেখার সম্বন্ধে সেই  
নিষ্পত্তি (৩১) কেননা এই দুই ত্রিভুজের উন্নতি রেখা এক  
অর্থাৎ ও বিন্দু হইতে কথ রেখার লম্ব, একারণ তাহারদের  
ভূমি পরিমাণে পরস্পর অমুপাত। তদ্রূপ যৎপরিমাণে গঘও  
ত্রিভুজের কথও সহিত নিষ্পত্তি গও রেখার সেই পরিমাণে  
ওক সহিত নিষ্পত্তি অতএব (৩১১) খঘ রেখার ঘক সহিত  
যে নিষ্পত্তি পরিমাণ গও রেখার ওক সহিত সেই নিষ্পত্তি  
পরিমাণ।

দ্বিতীয়তঃ কখগ ত্রিভুজের কথ কগ বাহু ত্রিভুজের মধ্যে  
থাকিয়া অথবা বাহিরে বদ্ধিত হইয়া ঘ এবং ও বিন্দুতে  
অমুপাতীয় রূপে ছিন্ন হউক অর্থাৎ খঘ রেখার ঘক সম্বন্ধে  
যে নিষ্পত্তি পরিমাণ গও রেখার ওক সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি  
পরিমাণ হউক তাহাতে ঘও খগ সমানান্তরাল উপপন্ন  
হইবে।

পূর্ববৎ অমুপাত্য কল্পনা কর। অপর খঘ ঘক সম্বন্ধে যে  
অমুপাত গও ওক সম্বন্ধেও সেই অমুপাত এবং খঘ ঘক সম্বন্ধে  
যে অমুপাত খওঘ ঘওক ত্রিভুজ সম্বন্ধেও সেই অমুপাত  
(৩১) তথা গও ওক সম্বন্ধে যে অমুপাত গঘও ঘওক সম্বন্ধেও  
সেই অমুপাত অতএব খওঘ ঘওক ত্রিভুজ সম্বন্ধে যে অমু-  
পাত গঘও ঘওক সম্বন্ধেও সেই অমুপাত অর্থাৎ ঘওক ত্রিভুজ  
সম্বন্ধে খওঘ গঘও দুই ত্রিভুজের নিষ্পত্তি সমান অতরাং  
(৫৯) খওঘ ত্রিভুজ গঘও ত্রিভুজের সমান। অধিকন্তু শেবোক্ত  
দুই ত্রিভুজ ঘও এক ভূমির উপরিস্থ আছে এবং সমান২

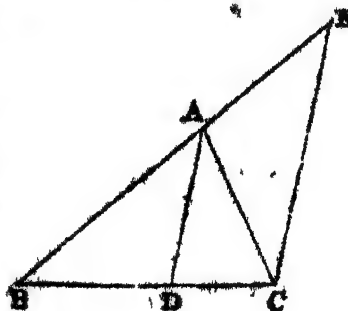
fore  $DE$  is parallel to  $BC$ . Wherefore, "if a straight line," &c. Q. E. D.

### PROP. III. THEOR.

*If the vertical angle of a triangle be bisected by a straight line which also cuts the base; the segments of the base shall have the same ratio which the other sides of the triangle have to one another: And if the segments of the base have the same ratio which the other sides of the triangle have to one another, the straight line drawn from the vertex to the point of section bisects the vertical angle.*

Let the vertical angle  $BAC$ , of any triangle  $ABC$ , be divided into two equal angles by the straight line  $AD$ ;  $BD$  is to  $DC$  as  $BA$  to  $AC$ .

Through the point  $C$  draw  $CE$  parallel (31. 1.) to  $DA$ , and let  $BA$  produced meet  $CE$  in  $E$ . Because the straight line  $AC$  meets the parallels  $AD$ ,  $EC$ , the angle  $ACE$  is equal to the alternate angle  $CAD$  (29. 1.): But  $CAD$ , by the hypothesis, is equal, to the angle  $BAD$ ; wherefore  $BAD$  is equal to the angle  $ACE$ . Again, because the straight line  $BAE$  meets the parallels  $AD$ ,  $EC$ , the exterior angle  $BAD$  is equal to the interior opposite angle  $AEC$ : But the angle  $ACE$  has been proved equal to the angle  $BAD$ ; therefore also  $ACE$  is equal to the



ত্রিভুজ এক ভূমির উপর হইলে একই সমানান্তরালের মধ্যে থাকে (১।৩৯) একারণ ঘণ্ড খগ সমানান্তরাল। অতএব ত্রিভুজের এক বাহুর ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

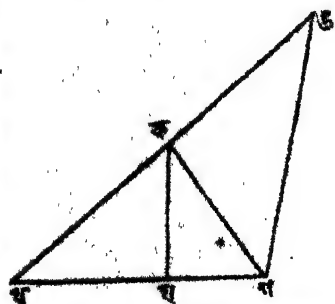
### ৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ যদি কোন সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হয় এবং সেই সরল রেখা যদি ভূমিকে ছিন্ন করে তবে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যে নিস্পত্তি ভূমির দুই খণ্ডের পরস্পর সম্বন্ধেও সেই নিস্পত্তি হইবে, এবং অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যে নিস্পত্তি ভূমির দুই খণ্ডের পরস্পর সম্বন্ধে যদি সেই নিস্পত্তি হয় তবে ভূমির ছেদ চিহ্ন হইতে ত্রিভুজ শৃঙ্গ পর্যন্ত সরল রেখা টানিলে সেই রেখা শৃঙ্গস্থ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কখগ ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ খকগ কোণ কখ সরল রেখা দ্বারা দুই সমান ভাগে বিভক্ত হউক। খঘ রেখার খগ সম্বন্ধে যে নিস্পত্তি খক রেখার কগ সম্বন্ধেও সেই নিস্পত্তি।

গ বিন্দু দিয়া গঙ রেখা খক রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান (১।৩১) এবং খক রেখা বর্দ্ধিত হইয়া ও বিন্দু তে গঙ রেখায় সংলগ্ন হউক। কখ গুণ সমানান্তরাল রেখার উপর কগ রেখার সম্পাত হইয়াছে

একারণ কগও কোণ অপর পার্শ্বস্থ গকঘ কোণের সমান (১।২৯)। অধিকন্তু গকঘ খকখ কোণ সমান। কল্পিত হইয়াছে সুতরাং খকখ কোণ কগও কোণ সমান। অপর কখ গুণ



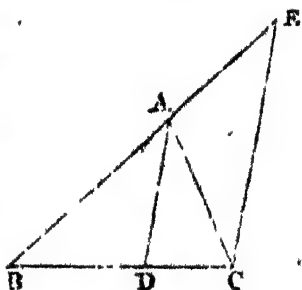
সমানান্তরাল সরল রেখার উপর খকও সরল রেখার সম্পাত



angle AEC, and consequently the side AE is equal to the side (6. 1.) AC. And because AD is drawn parallel to one of the sides of the triangle BCE, viz. to EC, BD is to DC, as BA to AE (2. 6.); but AE is equal to AC: therefore, as BD to DC, so is BA to AC (7. 5.)

Next, Let BD be to DC, as BA to AC, and join AD; the angle BAC is divided into equal angles, by the straight line AD.

The same construction being made: because, as BD to DC, so is BA to AC; and as BD to DC, so is BA to AE (2. 6.), because AD is parallel to EC, therefore AB is to AC, as AD to AE (11. 5.); Consequently AC is equal to AE (9. 5.), and the angle AEC is therefore equal to the angle ACE



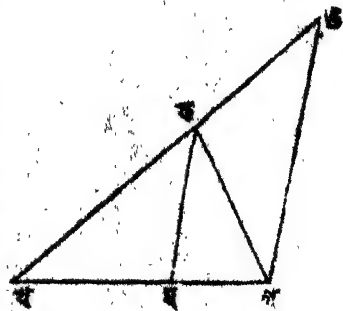
(5. 1.) But the angle AEC is equal to the exterior opposite angle BAD; and the angle ACE is equal to the alternate angle CAD (29. 1.). Wherefore also the angle BAD is equal to the angle CAD: Therefore the angle BAC is cut into two equal angles by

ইহায়াছে তন্মিমিত্ত খকষ বহিঃ কোণ কঙগ অন্তরস্থ সমুখ-  
বর্ত্তি কোণের সমান পরন্তু কগঙ কোণ খকষ সমান উপপন্ন  
ইহায়াছে অতএব কগঙ এবং কঙগ পরস্পর সমান সুতরাং  
কঙ কগ দুই বাহুও সমান (১।৬) । অপর কষ সরল রেখা খগঙ  
ত্রিভুজের গঙ বাহুর সমানান্তরাল হওয়াতে খক কঙ সম্বন্ধে  
যে নিষ্পত্তি বিশিষ্ট খঘ ঘগ সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি যুক্ত  
হইবে (৬।২) এবং কঙ কগ সমান হওয়াতে খক রেখার কগ  
সহিত যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘগ সহিতও সেই নিষ্পত্তি  
(৪।৭) উপপন্ন হইল ।

অপিচ খক রেখার কগ সহিত যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘগ  
সহিত সেই নিষ্পত্তি কল্পিত হউক তাহাতে কষ সংযুক্ত  
করিলে তদ্বারা খকগ কোণ দ্বিখণ্ডিত উপপন্ন হইবে ।

পূর্ববৎ অঙ্কপাত কর । অতএব খক রেখার কগ সহিত যে  
নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘগ সহিত সেই নিষ্পত্তি এবং কঙ কগ  
সমানান্তরাল প্রযুক্ত (৬।২) খক রেখার কঙ সহিত যে নিষ্পত্তি  
খঘ রেখার ঘগ সহিত সেই নিষ্পত্তি একারণ (৫।১১) খক  
রেখার কগ সহিত যে নিষ্পত্তি খক রেখার কঙ সহিতও সেই  
নিষ্পত্তি উপপন্ন হইল সুতরাং কগ কঙ পরস্পর সমান (৫।২)  
তন্মিমিত্ত কগঙ এবং কঙগ কোণও পরস্পর সমান (১।৫) অধি-  
কন্তু কষ ওগ সমানান্তরাল প্রযুক্ত খকষ বহিঃ কোণ কঙগ

অন্তরস্থ সমুখবর্ত্তি কোণের  
সমান এবং কগঙ কোণ  
অপর পার্শ্বস্থ গকষ  
সমান (১।২৯) অতএব  
খকষ কোণ খকগ সমান  
সুতরাং খকগ কোণ কঘ  
সরল রেখার ঘার দুই  
সমান ভাগে বিভক্ত সপ্র-



the straight line AD. Therefore, if the vertical angle, &c.  
Q. E. D.

### PROP. A. THEOR.

*If the exterior angle of a triangle be bisected by a straight line which also cuts the base produced; the segments between the bisecting line and the extremities of the base have the same ratio which the other sides of the triangle have to one another: And if the segments of the base produced have the same ratio which the other sides of the triangle have; the straight line, drawn from the vertex to the point of section bisects the exterior angle of the triangle.*

Let the exterior angle CAE of any triangle ABC, be bisected by the straight line AD which meets the base produced in D; BD is to DC, as BA to AC.

Through C draw CF parallel to AD (31. 1.); and because the straight line AC meets the parallels AD, FC, the angle ACF is equal to the alternate angle CAD (29. 1.): But CAD is equal to the angle DAE (Hyp.); therefore also DAE is equal to the angle ACF. Again,

মাণ হইল। অতএব ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ ইত্যাদি। ইহাই  
এস্থলে উপপাদ্য।

### ক প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

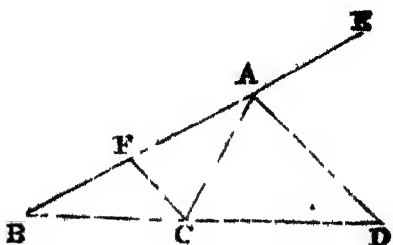
ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ যদি কোন সরল রেখা দ্বারা বিখ-  
ণ্ডিত হয় এবং সেই সরল রেখা যদি বদ্ধিত ভূমিকে ছিন্ন  
করে তবে অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি  
দ্বিখণ্ডকারিণী সরল রেখা এবং ভূম্যগ্রে মধ্যস্থিত দুই  
সরল রেখার পরস্পর সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি হইবে। তথা  
বদ্ধিত ভূমি কোন স্থলে ছিন্ন হইলে ছেদ চিহ্ন এবং ভূম্যগ্রে  
মধ্যস্থিত দুই সরল রেখার পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি  
অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যদি সেই নিষ্পত্তি হয় তবে  
ছেদ চিহ্ন হইতে শৃঙ্গ পর্যন্ত সরল রেখা নিক্ষেপ্য করিলে তদ্বারা  
বহিস্থ কোণ দ্বিখণ্ডিত হইবে।

কখন ত্রিভুজের বহিস্থ গকণ্ড কোণ কখন সরল রেখা দ্বারা  
দ্বিখণ্ডিত রূপে কল্পিত হউক এবং বদ্ধিত ভূমির য চিহ্নে কখন  
রেখার সম্পাত হউক তাহাতে যখন যথা কখন সম্বন্ধে যখন  
তথা যখন সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে।

গ বিন্দু দিয়া গচ সরল রেখা কখন রেখার সমানান্তরাল  
করিয়া নিক্ষেপন কর (১৩১)। কখন চগ সমানান্তরাল  
রেখার উপর কখন রেখার সম্পাত হইতেছে একারণ চগক  
কোণ অপূর্ণ পাশ্বস্থ গকণ্ড কোণ সমান (১২৯) অধিকন্তু গকণ্ড  
কোণ যকণ্ড কোণ সমান কল্পিত হইয়াছে অতএব কগচ কোণ  
যকণ্ড সমান। অপূর্ণ চগ কখন সমানান্তরালের উপর চকণ্ড রেখা  
সম্পাত হইতেছে এনিমিত্ত যকণ্ড কহিস্থ কোণ কচগ অন্তরস্থ  
সমুখবর্ত্তি কোণ সমান হইবে কিন্তু যকণ্ড কোণ কগচ সমান  
সমপ্রমাণ হইয়াছে অতএব কগচ কচগ দুই কোণ পরস্পর

because the straight line  $FAE$  meets the parallels  $AD$ .

$FC$ , the exterior angle  $DAE$  is equal to the interior opposite angle  $CFA$ : But the angle  $ACF$  has been proved to be equal to the angle  $DAE$ ; therefore also the



angle  $ACF$  is equal to the angle  $CFA$ , and consequently the side  $AF$  is equal to the side  $AC$  (6. 1.). and because  $AD$  is parallel to  $FC$ , a side of the triangle  $BCE$ ,  $BD$  is to  $DC$ , as  $BA$  to  $AF$  (2. 6.), but  $AF$  is equal to  $AC$ ; therefore as  $BD$  is to  $DC$  so is  $BA$  to  $AC$ .

Now, Let  $BD$  be to  $DC$ , as  $BA$  to  $AC$ , and join  $AD$ ; the angle  $CAD$  is equal to the angle  $DAE$ .

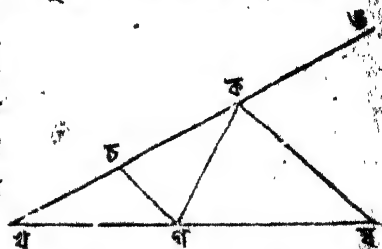
The same construction being made, because  $BD$  is to  $DC$ , as  $BA$  to  $AC$ ; and also  $BD$  to  $DC$ , as  $BA$  to  $AF$  (2. 6.); therefore  $BA$  is to  $AC$ , as  $BA$  to  $AF$  (11. 5.); wherefore  $AC$  is equal to  $AF$  (9. 5.), and the angle  $AFC$  equal (5. 1.) to the angle  $ACF$ : But the angle  $AFC$  is equal to the exterior angle  $EAD$ , and the angle  $ACF$  to the alternate angle  $CAD$ ; therefore also  $EAD$  is equal to the angle  $CAD$ . Wherefore, if the exterior, &c., Q. E. D.

#### PROP. IV. THEOR.

*The sides about the equal angles of equiangular triangles are proportionals; and those which are opposite to the equal angles are homologous sides; that is, are the antecedents or consequents of the ratios.*

## কেন্দ্রত্ব।

সমান সূত্রাং কগ কচ রেখাও পরস্পর সমান (১৩)।  
 পুনশ্চ কঘ রেখা খগচ ত্রিভুজের গচ বাহুর সমানান্তরাল  
 একারণ (৬২) খঘ যথা  
 ঘগ সম্বন্ধে ঋক তথা কচ  
 সম্বন্ধে। পরন্তু কচ কগ  
 সমান অতএব খঘ যথা  
 ঘগ সম্বন্ধে ঋক তথা কগ  
 সম্বন্ধে উপপন্ন হইল।



অপিচ খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে ঋক তথা কগ সম্বন্ধে কল্পিত  
 হউক তাহাতে কঘ সংযুক্ত করিলে গকঘ কোণ ঋকও সমান  
 উপপন্ন হইবে।

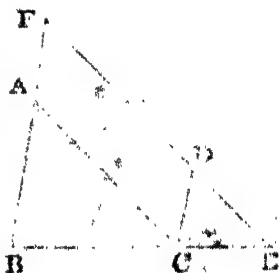
পূর্ববৎ অঙ্কপাত কর। খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে ঋক তথা  
 কগ সম্বন্ধে কল্পিত হইয়াছে এবং (৬২) খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে  
 ঋক তথা কচ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইতেছে অতএব (৫১১)  
 ঋক যথা কগ সম্বন্ধে ঋক তথা কচ সম্বন্ধে উপপন্ন হইল  
 সূত্রাং কগ রেখা কচ সমান (৫১২) এবং কচগ কোণ কগচ  
 কোণ সমান (১৫) অধিকন্তু কচগ কোণ বহিঃ ঋকও সমান  
 এবং কগচ কোণ অপর পার্শ্ব ঋকগ কোণ সমান অতএব  
 গকঘ এবং ঋকও কোণ পরস্পর সমান উপপন্ন হইল।  
 অতএব ত্রিভুজের বহিঃ কোণ ইত্যাদি। ইহাই এখানে  
 উপপাদ্য।

## ৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান কোণি ত্রিভুজ সকলের সমান কোণের পার্শ্ব  
 বাহ পরস্পর সমাপাতীয়, এবং সমান কোণের সমুদ্বাহ  
 পরস্পর সমাপাতীয় অর্থাৎ তাহারা ত্রিভুজ সম্বন্ধে অগ্রবর্তি  
 অথবা পশ্চাবর্তি হইবে।

Let  $ABC$ ,  $DCE$  be equiangular triangles, having the angle  $ABC$  equal to the angle  $DCE$ , and the angle  $ACB$  to the angle  $DEC$ , and consequently (32. 1.) the angle  $BAC$  equal to the angle  $CDE$ ; the sides about the equal angles of the triangles  $ABC$ ,  $DCE$  are proportionals, and those are the homologous sides which are opposite to the equal angles.

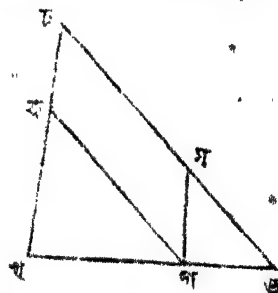
Let the triangle  $DCE$  be placed, so that its side  $CE$  may be contiguous to  $BC$ , and in the same straight line with it: and because the angles  $ABC$ ,  $ACB$  are together less than two right angles (17. 1.),  $ABC$ , and  $DEC$ , which is equal to  $ACB$ , are also less than two right angles; wherefore  $BA$ ,  $ED$  produced shall meet (Cor. 29. 1.); let them be produced and meet in the point  $F$ ; and because the angle  $ABC$  is equal to the angle  $DCE$ ,  $BF$  is parallel (28. 1.) to  $CD$ . Again, because the angle  $ACB$  is equal to the angle  $DEC$ ,  $AC$  is parallel to  $FE$  (28. 1.) Therefore  $FACD$  is a parallelogram; and consequently  $AF$  is equal to  $CD$ , and  $AC$  to  $FD$  (34. 1.). And because  $AC$  is parallel to  $FE$ , one of the sides of the triangle  $FBE$ ,  $BA : AF :: BC : CE$  (2. 6.); but  $AF$  is equal to  $CD$ ; therefore (7. 5.)  $BA : CD :: BC : CE$ ; and alternately  $BA : BC :: DC : CE$  (16. 5.). Again, because  $CD$  is parallel to  $BF$ ,  $BC : CE :: FD : DE$  (2. 6.); but  $FD$  is equal to  $AC$ ; therefore  $BC : CE :: AC : DE$ ; and alternately,  $BC : CA :: CE : ED$ .



কখগ ঘগঙ ছই সমান২ কোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজ কল্পনা কর  
তাহার মধ্যে কখগ কোণ ঘগঙ কোণের এবং কগখ কোণ ঘগঙ  
কোণের সমান আর খকগ কোণ সুতরাং (১।৩২) গঘঙ কোণের  
সমান। এস্থলে কখগ ঘগঙ ত্রিভুজের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ  
বাহু অনুপাতীয় এবং সমান২ কোণের সম্মুখবর্ত্তি বাহু  
সদর্পীয় হইবে।

ঘগঙ ত্রিভুজ অবস্থাকারে স্থাপিত কর যেন গঙ বাহু খগ  
বাহুর অগ্রে সংলগ্ন হইয়া তাহার সহিত ক্রমশ এক সরল রেখা  
হয়। অপর কখগ এবং কগখ ছই কোণ একত্র বোঁগে ছই  
সম কোণের স্থান (১।১৭), এবং ঘগঙ কগখ কোণের  
সমান হওয়াতে কখগ ঘগঙ ছই কোণও একত্র ছই সম

কোণের স্থান হইবে সুতরাং  
এক বৈচিত্র্য সরল রেখা বন্ধিত  
হইলে কোন স্থানে একত্র সং-  
লগ্ন হইবে (১।২২ অনুমান)  
৩ ভিত্তে তাহারদের সম্মুখ  
হউক। কখগ কোণ ঘগঙ  
সমান একারণ চখ এবং ঘগ



পরস্পর সমানান্তরাল (১।২৮) এবং কগখ কোণ ঘগঙ সমান  
একারণ কগ ও চঙ পরস্পর সমানান্তরাল সুতরাং কগঘচ সমা-  
নান্তরাল ক্ষেত্র এবং কগ চঘ তথা কচ গঘ পরস্পর সমান  
(১।৩৪)। অপর কগ সরল রেখা চখও ত্রিভুজের চঙ বাহুর সমা-  
নান্তরাল একারণ ঋক : কচ :: খগ : গঙ (৬।২) পরন্তু কচ এবং  
গঘ পরস্পর সমান অতএব (৫।৭) ঋক : গঘ :: খগ : গঙ এবং  
নিম্নময় নিষ্পত্তিতে (৫।১৬) ঋক : খগ :: গঘ : গঙ। পুনশ্চ  
গঘ খচ পরস্পর সমানান্তরাল একারণ (৬।২) ঋক : গঙ ::  
চঘ : ঘঙ পরন্তু চঘ কগ পরস্পর সমান তন্নিমিত্ত খগ : গঙ



Therefore, because it has been proved, that  $AB : BC :: DC : CE$ ; and  $BC : CA :: CE : ED$ , *ex æquali*,  $BA : AC :: CD : DE$ . Therefore, "the sides", &c. Q. E. D.

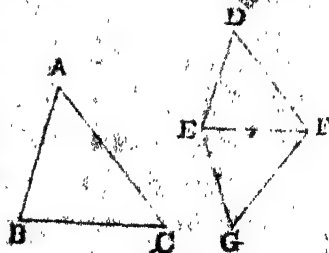
### PROP. V. THEOR.

*If the sides of two triangles, about each of their angles, be proportionals, the triangles shall be equiangular, and have their equal angles opposite to the homologous sides.*

Let the triangles  $ABC$ ,  $DEF$ , have their sides proportionals, so that  $AB$  is to  $BC$ , as  $DE$  to  $EF$ ; and  $BC$  to  $CA$ , as  $EF$  to  $FD$ ; and consequently, *ex æquali*,  $BA$  to  $AC$ , as  $ED$  to  $DF$ ; the triangle  $ABC$  is equiangular to the triangle  $DEF$ , and their equal angles are opposite to the homologous sides, viz. the angle  $ABC$  being equal to the angle  $DEF$ , and  $BCA$  to  $EFD$ , and also  $BAC$  to  $EDF$ .

At the points  $E$ ,  $F$ , in the straight line  $EF$ , make

(23. 1.) the angle  $FEG$  equal to the angle  $ABC$ , and the angle  $EFG$  equal to  $BCA$ ; wherefore the remaining angle  $BAC$  is equal to the remaining angle  $EGF$  (32. 1.), and the triangle  $ABC$  is therefore equiangular to



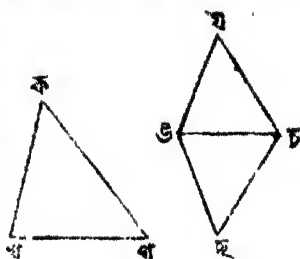
the triangle  $GEF$  and consequently they have their sides opposite to the equal angles proportionals (4. 6). Wherefore

∴ কগ : ঘঙ এবং বিনিময় নিষ্পত্তিতে খগ : কগ :: গঙ : ঘঙ। অতএব কখ : খগ :: গঘ : গঙ এবং খগ : কগ :: গঙ : ঘঙ এই হেতুক সামান্যতঃ খক : কগ :: গঘ : ঘঙ। অতএব সমান কোণি ত্রিভুজ ইত্যাদি। ইহাই এতলে উপপাদ্য।

### ৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পার্শ্বস্থ বাহু যদি ক্রমশঃ অনুপাতীয় হয় তবে তাহারা সমান২ কোণ বিশিষ্ট এবং সমান২ কোণ সর্বগীয় বাহুর সম্মুখস্থ হইবে।

কখগ ঘঙচ ত্রিভুজের বাহু অনুপাতীয় রূপে কল্পনা কর অর্থাৎ কখ যথা খগ সম্বন্ধে ঘঙ তথা গচ সম্বন্ধে এবং খগ যথা গক সম্বন্ধে গচ তথা চগ সম্বন্ধে এবং সুতরাং (সামান্যতঃ) খক যথা কগ সম্বন্ধে গঘ তথা ঘচ সম্বন্ধে জ্ঞান কর, তাহাতে কখগ ঘঙচ ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে এবং সর্বগীয়



বাহুর সম্মুখস্থ কোণ পরস্পর সমান হইবে অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ সমান এবং খগক কোণ গচঘ সমান তথা খকগ কোণ গঘচ সমান হইবে।

গচ সরল রেখাস্থ গচ বিন্দুতে চঙছ কোণ কখগ সমান করিয়া এবং গচছ কোণ কগখ সমান করিয়া নির্দ্বাসন কর (১২৩) সুতরাং অবশিষ্ট খকগ কোণ গচচ কোণ তুল্য (১৩২) এবং কখগ ত্রিভুজ গচছ ত্রিভুজের সমান কোণি হইবে এবং তন্মিনিত্ত ঐ দুই ত্রিভুজের সমান২ কোণের সম্মুখস্থ বাহু অনুপাতীয় হইবে (৩৮)। অতএব

$AB : BC :: GE : EF$ ; but, by supposition,

$AB : BC :: DE : EF$ , therefore,

$DE : EF :: GE : EF$ . Therefore, (11. 5.)

$DE$  and  $GE$  have the same ratio to  $EF$ , and consequently are equal (9. 5.). For the same reason,  $DF$  is equal to  $FG$ . And because, in the triangles  $DEF$ ,  $GEF$ ,  $DE$  is equal to  $EG$ , and  $EF$  common, and also the base  $DF$  equal to the base  $GF$ ; therefore the angle  $DEF$  is equal (8. 1.) to the angle  $GEF$ , and the other angles to the other angles, which are subtended by the equal sides (4. 1.). Wherefore the angle  $DFE$  is equal to the angle  $GFE$ , and  $EDF$  to  $EGF$ ; and because the angle  $DEF$  is equal to the angle  $GEF$ , and  $GEF$  to the angle  $ABC$ ; therefore the angle  $ABC$  is equal to the angle  $DEF$ . For the same reason, the angle  $ACB$  is equal to the angle  $DFE$ , and the angle at  $A$  to the angle at  $D$ . Therefore the triangle  $ABC$  is equiangular to the triangle  $DEF$ . Wherefore "if the sides," &c. Q. E. D.

## PROP. VI. THEOR.

*If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other, and the sides the equal angles proportionals, the triangles shall be equiangular, and shall have those angles equal which are opposite to the homologous sides.*

Let the triangles  $ABC$ ,  $DEF$  have the angle  $BAC$  in the one equal to the angle  $EDF$  in the other, and the sides about those angles proportionals; that is,  $BA$  to  $AC$ , as  $ED$  to  $DF$ ; the triangles  $ABC$ ,  $DEF$  are equiangular, and have the angle  $ABC$  equal to the angle  $DEF$ , and  $ACB$  to  $DFE$ .

কথ : খগ :: ছণ্ড : ওচ কিন্তু কল্পনানুসারে

কথ : খগ :: ঘণ্ড : ওচ সুতরাং

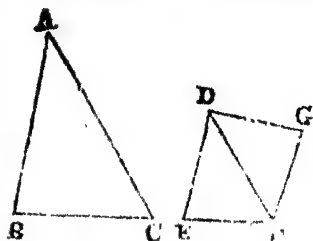
ঘণ্ড : ওচ :: ছণ্ড : ওচ অতএব ঘণ্ড এবং ছণ্ড রেখার ওচ সহিত সমান নিম্পত্তি হওয়াতে তাহারা পরস্পর সমান (৫১২) । এই কারণে ঘচ এবং চছ রেখাও পরস্পর সমান । অপর ঘণ্ড ও চছ এই দুই ত্রিভুজে ঘণ্ড ও চছ পরস্পর সমান এবং ওচ সামান্য বাহু আর ঘচ ভূমি ছচ ভূমির তুল্য একারণ (১৮) ঘণ্ড কোণ চণ্ড কোণের সমান এবং সমান বাহুর সম্মুখস্থ কোণও পরস্পর সমান (১৪) একারণ ঘচণ্ড কোণ ছচণ্ড সমান এবং ওচচ কোণ ওচচ সমান । অধিকন্তু ছণ্ড কোণ কথগ সমান একারণ কথগ কোণ ঘচচ সমান । তদ্রূপ কগখ কোণ ঘচণ্ড এবং ক কোণ ঘ কোণের সমান উপপন্ন হইবে তদ্রিমিত্ত কথগ ত্রিভুজ ঘণ্ড ত্রিভুজের সমান কোণি । অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি—ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

### ৬ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

দুই ত্রিভুজের যদি একই কোণ সমান হয় এবং সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অমুপাতীয় হয় তবে এই দুই ত্রিভুজ সমান কোণি হইবে অর্থাৎ সবর্গীয় বাহুর সম্মুখস্থ কোণ সমান হইবে ।

কথগ এবং ঘণ্ড ত্রিভুজের মধ্যে একটির খকগ কোণ অন্যটির ওচ কোণের সমান এবং তৎপার্শ্বস্থ বাহু অমুপাতীয়, অর্থাৎ খক যথা কগ সম্বন্ধে ওচ তথা ঘচ সম্বন্ধে কল্পনা কর তাহাতে কথগ ঘণ্ড দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে অর্থাৎ কথগ কোণ ঘণ্ড কোণের এবং কগখ কোণ ঘচণ্ড কোণের সমান উপপন্ন হইবে ।

At the points D, F, in the straight line DF, make (23. 1.) the angle FDG equal to either of the angles BAC, EDF; and the angle DFG equal to the angle ACB; wherefore the remaining angle at B is equal to the remaining angle at G (32. 1.), and conse-



quently the triangle ABC is equiangular to the triangle DGF; and therefore

BA : AC :: GD : DF (4. 6.) But by hypothesis,

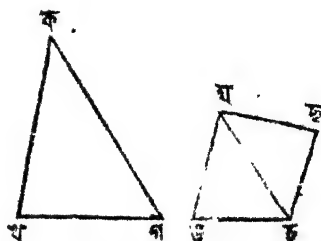
BA : AC :: ED : DF; and therefore

ED : DF :: GD : DF (11. 5.); wherefore ED is equal (9. 5.) to DG; and DF is common to the two triangles EDF, GDF; therefore the two sides ED, DF are equal to the two sides GD, DF; but the angle EDF is also equal to the angle GDF; wherefore the base EF is equal to the base FG (4. 1.), and the triangle EDF to the triangle GDF, and the remaining angles to the remaining angles, each to each, which are subtended by the equal sides: Therefore the angle DFG is equal to the angle DFE, and the angle at G to the angle at E: But the angle DFG is equal to the angle ACB; therefore the angle ACB is equal to the angle DFE, and the angle BAC is equal to the angle EDF (Hyp.); wherefore also the remaining angle at B is equal to the remaining angle at E. Therefore, the triangle ABC is equiangular to the triangle DEF. Wherefore, "if two triangles," &c. Q. E. D.

### PROP. VII. THEOR.

*If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other, and the sides about two other*

যচ রেখাঃ য এবং চ বিন্দুতে (১১৩) চঘছ কোণ খকগ  
অথবা ওঘচ কোণের  
এবংঘচছ কোণ কগখ  
কোণের সমান ক-  
রিয়া নিষ্কাশন কর  
সুতরাং অবশিষ্ট খ  
কোণ অবশিষ্ট ছ  
কোণের সমান (১১৩২)



এবং কখগ ঘচছ দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে  
অতএব খক : কগ : : ছঘ : ঘচ (৬৪) । কিন্তু কল্পনায়  
সবের খক : কগ : : ওঘ : ঘচ । অতএব

ওঘ : ঘচ : : ছঘ : ঘচ (৫১১) তন্নিমিত্ত ওঘ এবং ঘছ  
পরস্পর সমান (৫১২) এবং ঘচ ওঘচ চঘছ ত্রিভুজের সমান।  
বাহু একারণ ওঘ ঘচ দুই বাহু ছঘ ঘচ দুই বাহুর সমান অপর  
ওঘচ কোণও চঘছ কোণের সমান অতএব (১১৩) ওচ তুমি  
চছ তুমির এবং ওঘচ ত্রিভুজ চঘছ ত্রিভুজের সমান এবং  
সমানবাহুর সমাপেক্ষে অবশিষ্ট কোণও পরস্পর সমান সুতরাং  
ঘচছ কোণ ঘচঙ কোণের এবং ছ কোণ ও কোণের সমান ।  
অধিকন্তু ঘচছ কোণ কগখ কোণের সমান অতএব ঘচঙ কোণও  
কগখ কোণের সমান হইবে অপর ওঘচ কোণ কল্পনা প্রমাণ  
খকগ সমান তন্নিমিত্ত অবশিষ্ট ও কোণ অবশিষ্ট খ কোণের  
সমান এবং কখগ ত্রিভুজ ওঘচ ত্রিভুজের সমান কোণি উপপন্ন  
হইল । অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি । ইহাই গ্রন্থে উপপাদ্য ।

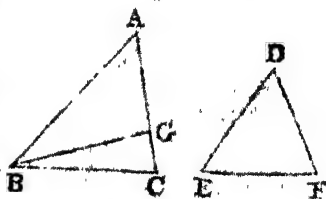
### ৭ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

দুই ত্রিভুজের যদি একই কোণ সমান হয় এবং অন্য একই  
কোণের পার্শ্ব বাহু যদি অসমপাতিয় হয় তবে অবশিষ্ট একই  
কোণ প্রত্যেকে সমকোণের স্থান অথবা অস্থান হইলে দুই

*angles proportionals, then, if each of the remaining angles be either less, or not less, than a right angle, the triangles shall be equiangular, and have those angles equal about which the sides are proportionals.*

Let the two triangles  $ABC$ ,  $DEF$  have one angle in the one equal to one angle in the other, viz. the angle  $BAC$  to the angle  $EDF$ , and the sides about two other angles  $ABC$ ,  $DEF$  proportionals, so that  $AB$  is to  $BC$ , as  $DE$  to  $EF$ ; and, in the first case, let each of the remaining angles at  $C$ ,  $F$ , be less than a right angle: the triangle  $ABC$  is equiangular to the triangle  $DEF$ , that is, the angle  $ABC$  is equal to the angle  $DEF$ , and the remaining angle at  $C$  to the remaining angle at  $F$ .

For, if the angles  $ABC$ ,  $DEF$ , be not equal, one of them is greater than the other: Let  $ABC$  be the greater, and at the point  $B$ , in the straight line  $AB$ , make the angle  $ABG$  equal to the angle (23. 1.)  $DEF$ : And because the angle at  $A$  is equal to the angle at  $D$ , and the angle  $ABG$



to the angle  $DEF$ ; the remaining angle  $AGB$  is equal (32. 1.) to the remaining angle  $DFE$ : Therefore the triangle  $ABG$  is equiangular to the triangle  $DEF$ ; wherefore (4. 6.),  $AB : BG :: DE : EF$ ; but by hypothesis,  $DE : EF :: AB : BC$ , therefore,  $AB : BC :: AB : BG$  (11. 5.)

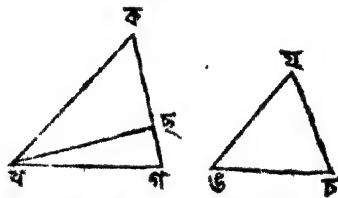
and because  $AB$  has the same ratio to each of the lines  $BC$ ,  $BG$ ;  $BC$  is equal (9. 5.) to  $BG$ , and therefore the angle  $BGC$  is equal to the angle  $BCG$  (5. 1.): But

ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে এবং যে২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অসুপাতীয় সেই২ কোণ সমান হইবে।

কথগ ঘঙচ ত্রিভুজের এক২ কোণ অর্থাৎ খকগ এবং ওঘচ সমান করিয়া কল্পনা কর এবং অন্য এক২ কোণের অর্থাৎ কথগ ঘঙচ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অসুপাতীয় অর্থাৎ কথ যথা খগ সম্বন্ধে ঘঙ তথা ওচ সম্বন্ধে কল্পনা কর এবং অবশিষ্ট গ চ কোণের প্রত্যেককে প্রথমত সমকোণের স্থান কল্পনা কর তাহাতে কথগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি উপপন্ন হইবে অর্থাৎ কথগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং অবশিষ্ট গ কোণ অবশিষ্ট চ কোণের সমান হইবে।

কেননা কথগ এবং ঘঙচ কোণ যদি পরস্পর সমান না হয়

তবে তাহাদের একটি অন্যাপেক্ষা বৃহৎতর হইবে কথগ কোণকে বৃহৎতর কল্পনা করিয়া খ বিন্দুতে কথ রেখায় কথছ কোণ ঘঙচ কোণের সমান কর



(১২৩) অপর ক কোণ ঘ কোণের এবং কথছ কোণ ঘঙচ কোণের সমান হওয়াতে অবশিষ্ট কছখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান (১২২) এবং কথছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি হইবে।

একারণ (৬৪) কথ : থছ :: ঘঙ : ওচ কিন্তু

কল্পনা প্রমাণ ঘঙ : ওচ :: কথ : থগ

অতএব (৫১১) কথ : থগ :: কথ : থছ।

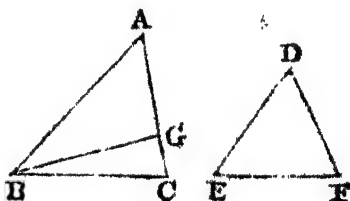
কথ রেখার থগ থছ প্রত্যেকের সম্বন্ধে নিম্নাতি পরিমাণ সমান হওয়াতে থগ থছ পরস্পর সমান হইবে (৫১২) সুতরাং থগছ থছগ ছই কোণও সমান (১৫) অপর কল্পনা প্রমাণ থগছ সমকোণের স্থান অতএব থছগ কোণও সমকোণের স্থান



the angle BCG is, by hypothesis, less than a right angle; therefore also the angle BGC is less than a right angle, and the adjacent angle AGB must be greater than a right angle (13. 1.). But it was proved, that the angle AGB is equal to the angle at F; therefore the angle at F is greater than a right angle; but by the hypothesis it is less than a right angle, which is absurd. Therefore the angles ABC, DEF are not unequal, that is, they are equal: And the angle at A is equal to the angle at D; wherefore the remaining angle at C is equal to the remaining angle at F: Therefore, triangle ABC is equiangular to the triangle DEF.

*Next,* Let each of the angles at C, F be not less than a right angle; the triangle ABC is also, in this case, equiangular to the triangle DEF.

The same construction being made, it may be proved, in like manner, that BC is equal to BG, and the angle at C equal to the angle BGC: But the angle at C is not less than a right angle; therefore the angle BGC is not less than a right angle: Where-



fore, two angles of the triangle BGC are together not less than two right angles, which is impossible (17. 1.); and therefore the triangle ABC may be proved to be equiangular to the triangle DEF, as in the first case.

### PROP. VIII. THEOR.

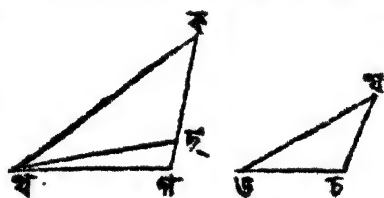
*In a right angled triangle, if a perpendicular be drawn from the right angle to the base; the triangles on each side of it are similar to the whole triangle, and to one another.*

হইবে সুতরাং তৎসংস্পর্গ কছখ কোণ সমকোণের অতিরিক্ত হইবে (১১৩) পরন্তু কছখ কোণ ঘঙও সমান উপপন্ন হই-  
য়াছে একারণ ঘঙও কোণও সমকোণের অতিরিক্ত হইবে কিন্তু  
কল্পনা প্রমাণ তাহা সমকোণ হইতে অস্থান অতএব এস্থলে  
যুক্তির বিরোধ হইতেছে । তন্নিমিত্ত কখগ এবং ঘঙচ কোণ  
পরস্পরের অসমান নহে অর্থাৎ তাহারা পরস্পর সমান  
এবং ক ও ঘ বিন্দুস্থ কোণও সমান হওয়াতে অবশিষ্ট গ এবং  
চ বিন্দুস্থ কোণ সমান হইবে অতএব কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ  
ত্রিভুজের সমান কোণি ।

দ্বিতীয়তঃ গ চ বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে সমকোণের অস্থান  
রূপে কল্পিত হউক তাহাতেও কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের  
সমান কোণি উপপন্ন হইবে ।

পূর্ববৎ অঙ্কপাত করিয়া কখগ কোণকে ঘঙচ কোণের অস-  
মান কল্পনা করিলে ঐরূপে উপপন্ন হইবেক যে খগ খছ  
পরস্পর সমান এবং গ  
কোণ খছগ সমান ।

পরন্তু গ কোণ সম-  
কোণের অস্থান সুত-  
রাং খছগ কোণও



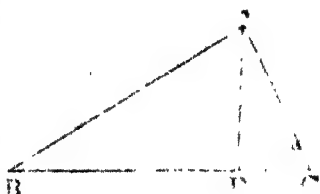
সমকোণের অস্থান হইবে তাহাতে খগছ ত্রিভুজের দুই কোণ  
একত্র যোগে দুই সমকোণের অস্থান হয় তাহা অসাধ্য  
(১১৭) সুতরাং প্রথম প্রকরণানুসারে কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ  
ত্রিভুজের সমান কোণি উপপন্ন হইতে পারে ।

### ৮ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

সমকোণি ত্রিভুজে সমকোণ হইতে ভূমি পর্যাস্ত লম্বপাত  
করিলে লম্বের দুই পার্শ্বস্থ ত্রিভুজ সমদ্বয় ত্রিভুজের এবং  
পরস্পরের সদৃশ হইবে ।

Let  $ABC$  be a right angled triangle, having the right angle  $BAC$ ; and from the point  $A$  let  $AD$  be drawn perpendicular to the base  $BC$ ; the triangles  $ABD$ ,  $ADC$  are similar to the whole triangle  $ABC$ , and to one another.

Because the angle  $BAC$  is equal to the angle  $ADB$ , each of them being a right angle, and the angle at  $B$  common to the two triangles  $ABC$ ,  $ABD$ ; the remaining angle  $ACB$  is equal to the remaining angle  $BAD$  (32. 1.); therefore the triangle  $ABC$  is equiangular to the triangle  $ABD$ , and the sides about their equal angles are proportionals (4. 6.);

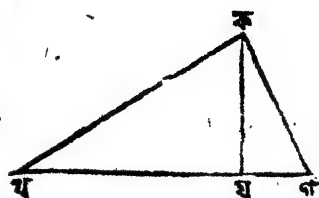


wherefore the triangles are similar (Def. 1. 6.). In like manner, it may be demonstrated, that the triangle  $ADC$  is equiangular and similar to the triangle  $ABC$ ; and the triangles  $ABD$ ,  $ADC$ , being each equiangular and similar to  $ABC$ , are equiangular and similar to one another. Therefore "in a right angled," &c. Q. E. D.

COR. From this it is manifest, that the perpendicular drawn from the right angle of a right angled triangle, to the base, is a mean proportional between the segments of the base; and also that each of the sides is a mean proportional between the base and its segment adjacent to that side. For in the triangles  $BDA$ ,  $ADC$ ,

$BD : DA :: DA : DC$  (4. 6.); and in the triangles  $ABC$ ,  $BDA$ ,  $BC : BA :: BA : BD$  (4. 6.); and in the triangles  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $BC : CA :: CA : CD$  (4. 6.).

কখগ সমকোণি ত্রিভুজ  
কল্পনা কর খকগ ত্রিভুজ  
সমকোণ পরে ক বিন্দু  
হইতে খগ ভূমির উপর লম্ব  
পাত কর তাহাতে কখঘ



এবং কখগ ত্রিভুজ সমুদয় কখগ ত্রিভুজের এবং পরস্পরের  
সদৃশ হইবে ।

খকগ কখঘ প্রত্যেকে সমকোণ প্রযুক্ত পরস্পর সমান এবং  
খ বিন্দুস্থ কোণ কখগ কখঘ উভয়ের সামান্য কোণ একারণ  
অবশিষ্ট কগঘ এবং খকঘ কোণও পরস্পর সমান ( ১৩২ )  
অতএব কখগ কখঘ দুই ত্রিভুজ সমান কোণি সূত্রাং  
তাহারনের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহুও অমুপাতীয় (৬৪)  
তদ্বিমিত্ত তাহারা সদৃশ ( ৩১ সংজ্ঞা ) তদ্রূপ কখগ ত্রিভুজ  
কখগ ত্রিভুজের সমান কোণি ও সদৃশ উপপন্ন হইবে । অপর  
কখঘ কগঘ দুই ত্রিভুজ প্রত্যেকে কখগ ত্রিভুজের সমান  
কোণি ও সদৃশ হওয়াতে তাহারা পরস্পরও সমান কোণি  
এবং সদৃশ উপপন্ন হইল । অতএব সমকোণি ত্রিভুজে  
ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

অনুমান । এস্থলে স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে সমকোণি  
ত্রিভুজের সমকোণ হইতে ভূমির উপর লম্বপাত করিলে সেই  
লম্ব ভূমির দুই খণ্ডের মধ্য অমুপাতীয় হয় এবং ত্রিভুজের  
প্রত্যেক বাহু ভূমির এবং তৎসংলগ্ন ভূমি খণ্ডের মধ্য অমু-  
পাতীয় কেননা খক কখগ ত্রিভুজে

খঘ : খক :: খক : খগ (৬৪) এবং কখগ কখঘ  
ত্রিভুজে খগ : খক :: খক : খঘ (৬৪) এবং কখগ কগঘ  
ত্রিভুজে খগ : গক :: গক : গঘ (৬৪) ।

## PROP. IX. PROB.

*From a given straight line to cut off any part required that is, a part which shall be contained in it a given number of times.*

Let AB be the given straight line; it is required to cut off from AB, a part which shall be contained in it a given number of times.

From the point A draw a straight line AC making any angle with AB; and in AC take any point D, and take AC such that it shall contain AD, as oft as AB is to contain the part which is to be cut off from it; join BC, and draw DE parallel to it: then AE is the part required to be cut off.

Because ED is parallel to one of the sides of the triangle ABC, viz. to BC,  $CD : DA :: BE : EA$ . (2. 6.); and by composition (18. 5.)  $CA : AD :: BA : AE$ : But CA is a multiple of AD; therefore (6. 5.) BA is the same multiple of AE, or contains AE the same number of times



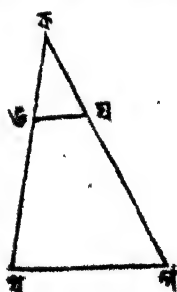
that AC contains AD; and therefore, whatever part AD is of AC, AE is the same of AB; wherefore, from

## ৯ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করিতে হইবে অর্থাৎ তাহাতে নির্দিষ্ট গুণ পরিমাণে ব্যাপ্ত হয় এমত অংশ ছেদ করিতে হইবে ।

কথ নির্দিষ্ট সরল রেখা তাহা হইতে এমত কোন অংশ ছেদ করিতে হইবে যাহা নির্দিষ্ট গুণ পরিমাণে তাহাতে ব্যাপ্ত হয় ।

ক বিন্দু হইতে কগ সরল রেখা নিক্ষেপন কর তাহাতে কথ সরল রেখা সম্পাতে যে কোন কোণ উৎপন্ন হউক । পরে কগ সরল রেখায় স্বেচ্ছানুসারে য চিহ্ন নির্দেশ করিয়া কগ সরল রেখাকে এবস্থকারে বৃদ্ধি কর যেন কথ সরল রেখার উদ্দেশ্য অংশ যে পরিমাণে তাহাতে ব্যাপ্ত কথ রেখা সেই পরিমাণে কগ রেখাতে ব্যাপ্ত হয় । অনন্তর খগ সংযুক্ত করিয়া ষও তাহার সমানান্তরাল ভাবে নিক্ষেপন কর তাহাতে কও কথ রেখার অর্ধেক অংশ হইবে ।



কথগ ত্রিভুজের খগ বাহুর সমানান্তরাল ভাবে ষও নিক্ষেপিত হইয়াছে এ কারণ (৬২) গথ যথা ষক সম্বন্ধে খও তথা ওক সম্বন্ধে হইবেক সুতরাং যোগ নিম্পত্তিতে (৫১৮) গক যথা কথ ষ সম্বন্ধে খক তথা কও সম্বন্ধে উপপন্ন হইল । অপর গক কথ রেখার অপবর্ত্য অতএব খক রেখাও সেই পরিমাণে কও রেখার অপবর্ত্য হইবে (৫১৬) অর্থাৎ গক রেখা যে পরিমাণে কথ রেখার ব্যাপক খক রেখাও সেই পরিমাণে কও রেখার ব্যাপক হইবে একারণ কথ রেখা কগ রেখার যে পরিমাণানুযায়ী অংশ কও রেখাও কথ রেখার সেই পরিমা-

the straight line  $AB$  the part required is cut off.  
*Which was to be done.*

### PROP. X. PROB.

*To divide a given straight line similarly to a given divided straight line, that is, into parts that shall have the same ratios to one another which the parts of the divided given straight line have.*

Let  $AB$  be the straight line given to be divided, and  $AC$  the divided line; it is required to divide  $AB$  similarly to  $AC$ .

Let  $AC$  be divided in the points  $D, E$ ; and let  $AB, AC$  be placed so as to contain any angle, and join  $BC$  and through the points  $D, E$ , draw (31. 1.)  $DF, EG$  parallel to  $BC$ ; and through  $D$  draw  $DHK$  parallel to  $AB$ ; therefore each of the figures

$FH, HB$ , is a parallelogram;

wherefore  $DH$  is equal (34. 1.)

to  $FG$ , and  $HK$  to  $GB$  and

because  $HE$  is parallel to  $KC$ ,

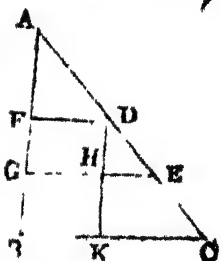
one of the sides of the triangle

$DKC$ ,  $CE : ED :: KH : HD$  :

(2. 6.) But  $KH = BG$ , and  $HD$

$= GF$ ; therefore  $CE : ED ::$

$BG : GF$ . Again, because  $FD$



is parallel to  $EG$ , one of the sides of the triangle  $AFG$   $ED : DA :: GF : FA$  : But it has been proved that  $CE : ED :: BG : GF$ ; therefore, the given straight line  $AB$  is divided similarly to  $AC$ . *Which was to be done.*

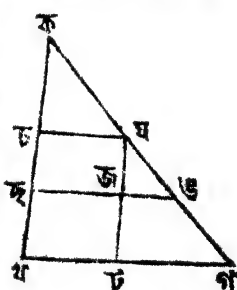
ণানুযায়ি অংশ হইবে সুতরাং কখ রেখার অভীষ্ট অংশ  
ছিন্ন হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

### ১০ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

নির্দিষ্ট সরল রেখাকে নির্দিষ্টরূপে বিভক্ত এক সরল রেখার  
সদৃশ বিভক্ত করিতে হইবে অর্থাৎ তাহা এমতঃ অংশে  
বিভাগ করিতে হইবে যে সে সকল অংশ বিভক্ত রেখার  
অংশের ন্যায় পরস্পরের সম্বন্ধে নিম্পত্তি যুক্ত হয়।

কখ নির্দিষ্ট ভাজ্য সরল রেখা, কগ নির্দিষ্ট বিভক্ত সরল  
রেখা, কখ রেখাকে কগ রেখার ন্যায় বিভক্ত করিতে হইবেক।

কগ সরল রেখাকে ঘ এবং ঙ  
বিন্দুতে বিভক্ত কল্পনা কর এবং কখ  
কগ রেখাকে এমত করিয়া স্থাপন কর  
যেন তাহারদের সম্পাতে কোণোৎপত্তি  
হয় পরে খগ সংযুক্ত করিয়া ঘ  
এবং ঙ বিন্দু দিয়া খগ রেখার সমা-  
নান্তরাল রূপে ঘচ ওহ নিষ্কাশন



কর (১।৩১) এবং ঘ বিন্দু দিয়া খজট রেখা কখ রেখার  
সমানান্তরাল করিয়া টান তাহাতে চজ জখ ঐত্যায়ে সমান-  
ান্তরাল ক্ষেত্র হইবে এবং ত্রিভুজিত্ত বজ চহ সমান এবং জট হখ  
সমান হইবে (১।৩২) অপর ঘটগ ত্রিভুজের টগ বাহুর সমা-  
নান্তরাল জঙ একারণ গঙ : ওঘ :: টজ : জঘ (৬।২)  
কিন্তু টজ = খহ এবং জঘ = ছচ অতএব গঙ : ওঘ :: খহ :  
ছচ। অপর কহঙ ত্রিভুজের হঙ বাহুর সমানান্তরাল চঘ একা-  
রণ ওঘ : ঘক :: ছচ : চক। অধিকন্তু ইহাও উপপন্ন হইয়াছে  
যে গঙ : ওঘ :: খহ : ছচ অতএব কখ নির্দিষ্ট রেখা কগ  
রেখার ন্যায় বিভক্ত হইল ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।



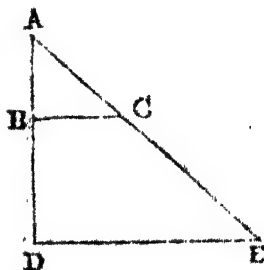
## PROP. XI. PROB.

*To find a third proportional to two given straight lines.*

Let  $AB$ ,  $AC$  be the two given straight lines, and let them be placed so as to contain any angle; it is required to find a third proportional to  $AB$ ,  $AC$ .

Produce  $AB$ ,  $AC$  to the points  $D$ ,  $E$ ; and make  $BD$  equal to  $AC$ : and having joined  $BC$ , through  $D$  draw  $DE$ , parallel to it (31. 1.).

Because  $BC$  is parallel to  $DE$ , a side of the triangle  $ADE$ ,  $AB : BD :: AC : CE$



(2. 6.): but  $BD = AC$ ; therefore  $AB : AC :: AC : CE$ . Wherefore, to the two given straight lines  $AB$ ,  $AC$ , a third proportional,  $CE$ , is found. Which was to be done.

## PROP. XII. PROB.

*To find a fourth proportional to three given straight lines.*

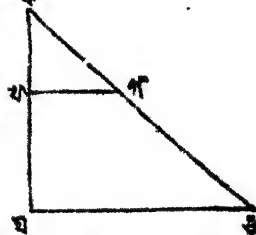
Let  $A$ ,  $B$ ,  $C$  be the three given straight lines; it is required to find a fourth proportional to  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Take two straight lines  $DE$ ,  $DF$ , containing any angle  $EDF$ : and upon these make  $DG$  equal to  $A$ ,  $GE$  equal to  $B$ , and  $DH$  equal to  $C$ ; and having joined  $GH$  draw  $EF$  parallel (31. 1.) to it through the point

## ১১ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

দুই নির্দিষ্ট সরল রেখার তৃতীয় অমুপাতীয় নির্দেশ করিতে হইবে ।

কথ কগ দুই নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন করিয়া স্থাপন কর যেন তাহারদের সম্পাতে কোণোৎপত্তি হয় । অপর তাহারদের তৃতীয় অমুপাতীয় নির্দেশ করিতে হইবে ।



কথ কগ সরল রেখাকে য এবং য ও পর্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া খঘ সরল রেখাকে কগ সমান কর এবং খগ সংযুক্ত করিয়া ঘ বিন্দু দিয়া ঘঙ তাহার সমানান্তরাল ভাবে নিক্ষেপন কর (১৩১) কঘঙ ত্রিভুজের ঘঙ বাহুর সমানান্তরাল খগ, একারণ কথ : খঘ :: কগ : গঙ (৬২) পরন্তু খঘ = কগ অতএব কথ : কগ :: কগ : গঙ সুতরাং কথ কগ নির্দিষ্ট সরল রেখার গঙ তৃতীয় অমুপাতীয় নির্দিষ্ট হইল ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য ।

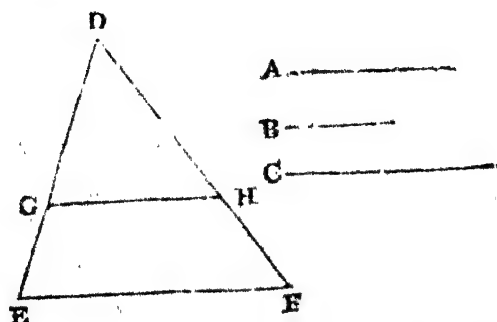
## ১২ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

তিন নির্দিষ্ট সরল রেখার চতুর্থ অমুপাতীয় নির্ণয় করিতে হইবে ।

ক, খ, গ, তিন নির্দিষ্ট সরল রেখা । তাহারদের চতুর্থ অমুপাতীয় নির্ণয় করিতে হইবে ।

ঘঙ ঘচ দুই সরল রেখা কল্পনা কর তাহারদের সম্পাতে কোণোৎপত্তি হইতে পারে যথা ওঘচ । অপর এই সরল রেখোপরি ঘঙ ক সমান হঙ খ সমান এবং ঘজ গ সমান করিয়া নিক্ষেপন কর এবং জল সংযুক্ত করিয়া ও বিন্দু

E. And because  $GH$  is parallel to  $EF$ , one of the sides of the triangle  $DEF$ ,  $DG : GE :: DH : HF$  (2. 6.) : but



$DG = A$ ,  $GE = B$ , and  $DH = C$  : and therefore  $A : B :: C : HF$ . Wherefore, to the three given straight lines,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , a fourth proportional  $HF$  is found Which was to be done.

### PROP. XIII. PROB.

*To find a mean proportional between two given straight lines.*

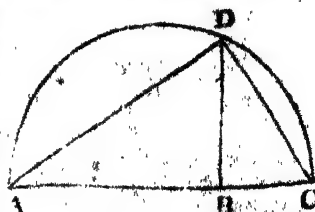
Let  $AB$ ,  $BC$  be the two given straight lines : it is required to find a mean proportional between them.

Place  $AB$ ,  $BC$  in a straight line, and upon  $AC$  describe the semicircle

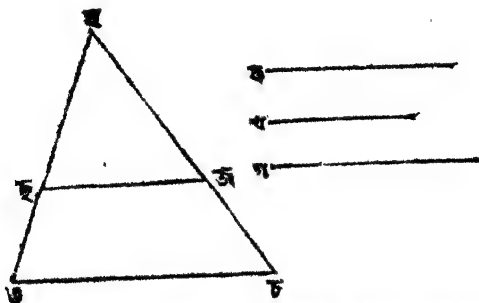
$ADC$ , and from the point  $B$  (11. 1.) draw  $BD$  at right angles to  $AC$ , and join  $AD$ ,  $DC$ .

Because the angle  $ADC$  in a semicircle is a right angle (31. 3.),

and because in the right angled triangle  $ADC$ ,  $DB$  is



দিয়া ওচ তাহার সমানান্তরাল রূপে নিক্ষেপন কর (১৩১)  
অপর যণ্ডচ ত্রিভুজের ওচ বাহুর সমানান্তরাল ছক একারণ



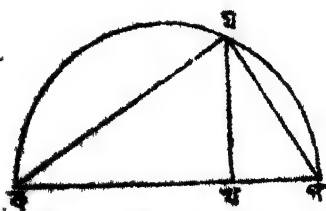
যহ : ছড :: যজ : জচ (৬:২) পরন্তু যহ = ক, ছড = খ এবং  
যজ = গ একারণ ক : খ :: গ : জচ অতএব ক খ গ তিন  
নির্দিষ্ট সরল রেখার জচ চতুর্থ অনুপাতীয় নির্ণীত হইল।  
ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

### ১৩ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

ছুই নির্দিষ্ট সরল রেখার মধ্য অনুপাতীয় নির্দেশ করিতে  
হইবে।

কখ খগ ছুই নির্দিষ্ট সরল রেখা, তাহারদের মধ্য অনু-  
পাতীয় নির্ণয় করিতে হইবে।

কখ খগ এক সরল  
রেখাত করিয়া কগ সর-  
ল রেখার উপর কখগ  
অঙ্ক বৃত্ত নিক্ষেপন কর  
এবং খ বিন্দু হইতে খখ  
রেখা কগ রেখার লম্ব  
নাবে টান (১১১) এবং কখ খগ সংযুক্ত কর।

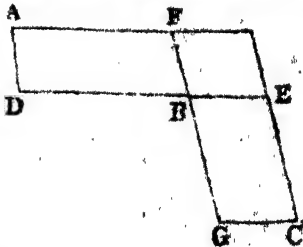


drawn from the right angle, perpendicular to the base, DB is a mean proportional between AB, BC, the segments of the base (Cor. 8. 6.) ; therefore, between the two given straight lines, AB, BC, a mean proportional DB is found. *Which was to be done.*

### PROP. XIV. THEOR.

*Equal parallelograms which have one angle of the one equal to one angle of the other, have their sides about the equal angles reciprocally proportional : And parallelograms which have one angle of the one equal to one angle of the other, and their sides about the equal angles reciprocally proportional, are equal to one another.*

Let AB, BC be equal parallelograms, which have the angles at B equal, and let the sides DB, BE be placed in the same straight line ; wherefore also FB, BG are in one straight line (14. 1.) : the sides of the parallelograms AB, BC, about the equal angles are, reciprocally proportional : that is, DB is to BE as GB to BF.



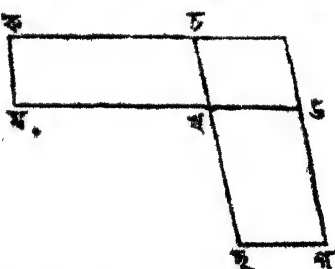
Complete the parallelogram FE ; and because the parallelograms AB, BC are equal, and FE is another parallelogram,  $AB : FE :: BC : FE$  (7. 5.) ; but because the parallelograms AB, FE have the same altitude,

কখগ কোন অর্ধ বৃত্তস্থ প্রযুক্ত সম কোন উপপন্ন হইতেছে (৩৩১) এবং কখগ সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণ হইতে ভূমি পর্যন্ত লম্বপাত হওয়াতে (৩৮ অনুমান) খগ সরল রেখা কখ খগ দুই ভূমি খগের মধ্য অনুপাতীয় সমপ্রমাণ হইল অতএব কখ খগ দুই সরল বেখার মধ্য অনুপাতীয় খগ নির্ণীত হইল। ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

### ১৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান২ সমানান্তুরাল ক্ষেত্রের এক২ কোন সমান হইলে তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হয়। তথা যে২ সমানান্তুরাল ক্ষেত্রের এক২ কোন সমান এবং সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় তাহার। পরস্পর সমান।

কখ খগ দুই সমান২ সমানান্তুরাল ক্ষেত্র তাহারদের খ বিন্দুস্থ কোন পরস্পর সমান। যখ খগ দুই বাহুকে এক সরল রেখা করি-  
য়া রাখ স্তুরাং চখ খছ দুই বাহুও এক সরল রেখা হইবে (১১৭) তাহাতে কখ খগ সমানান্তুরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় অর্থাৎ যখ যখা খগ সহজে ছখ তথা খচ সম্বন্ধে হইবে।



চও সমানান্তুরাল ক্ষেত্র পূর্ণ কর। কখ এবং খগ সমানান্তুরাল ক্ষেত্র পরস্পর সমান এবং চও অন্য এক সমানান্তুরাল ক্ষেত্র একারণ

$AB : FE :: DB : BE$  (1. 6.), also  
 $BC : FE :: GB : BF$  (1. 6.); therefore  
 $DB : BE :: GB : BF$  (11. 5.). Wherefore,  
 the sides of the parallelograms  $AB$ ,  $BC$  about their  
 equal angles are reciprocally proportional.

But, let the sides about the equal angles be reciprocally proportional, viz. as  $DB$  to  $BE$ , so is  $GB$  to  $BF$ ; the parallelogram  $AB$  is equal to the parallelogram  $BC$ .

Because,  $DB : BE :: GB : BF$ , and  $DB : BE :: AB : FE$ , and  $GB : BF :: BC : EF$ , therefore,  $AB : FE :: BC : EF$  (11. 5): Wherefore, the parallelogram  $AB$  is equal (9. 5.) to the parallelogram  $BC$ . Therefore, equal parallelograms, &c. Q. E. D.

### PROP. XV. THEOR.

*Equal triangles which have one angle of the one equal to one angle of the other, have their sides about the equal angles reciprocally proportional: And triangles which have one angle in the one equal to one angle in the other, and their sides about the equal angles reciprocally proportional, are equal to one another.*

Let  $ABC$ ,  $ADE$  be equal triangles, which have the angle  $BAC$  equal to the angle  $DAE$ ; the sides about the equal angles of these triangles are reciprocally proportional; that is,  $CA$  is to  $AD$ , as  $EA$  to  $AB$ .

কথ : চঙ :: খগ : চঙ (৫৭।)

অধিকন্তু কথ চঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের উন্নতি এক হও-  
য়াতে (৩১)

কথ : চঙ :: ঘথ : খঙ এবং

খগ : চঙ :: ছথ : খচ এ কারণ

ঘথ : খঙ :: ছথ : খচ (৫১১) অতএব কথ খগ সমানান্ত-  
রাল ক্ষেত্রের সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনু-  
পাতীয় উপপন্ন হইল।

অপিচ সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপা-  
তীয় কর্ত্তব্য কর অর্থাৎ ঘথ : খঙ :: ছথ : খচ তাহাতে কথ  
সমানান্তরাল ক্ষেত্র খগ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান উপপন্ন  
হইবে।

ঘথ : খঙ :: ছথ : খচ এবং ঘথ : খঙ :: কথ : চঙ এবং  
কথ : খঙ :: খগ : চঙ একারণ কথ : চঙ :: খগ : চঙ (৫১১)  
অতএব কথ সমানান্তরাল ক্ষেত্র খগ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের  
সমান (৫২) সুতরাং সমান সমানান্তরাল ইত্যাদি। ইহাই  
এখানে উপপাদ্য।

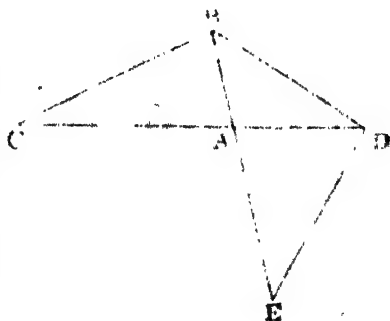
## ১৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান ত্রিভুজের এক কোণ সমান হইলে তাহারদের  
সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হয়। তথা  
যে ত্রিভুজের এক কোণ সমান এবং সমান কোণের পার্শ্বস্থ  
বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় তাহারা পরস্পর সমান।

কথগ কঘঙ দুই সমান ত্রিভুজ, তন্মধ্যে থকগ কোণ ঘকঙ  
কোণের সমান। এই দুই ত্রিভুজের সমান কোণের পার্শ্বস্থ  
বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হইবে অর্থাৎ গক ঘথ। কঘ সম্বন্ধে  
ওক তথা কথ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে।



Let the triangles be placed so that their sides CA, AD be in one straight line; wherefore also EA and AB are in one straight line (14. 1.); join BD. Because the triangle ABC is equal to the triangle ADE, and ABD is another triangle;



therefore, triangle CAB : triangle BAD :: triangle EAD : triangle BAD; but CAB : BAD :: CA : AD, and EAD : BAD :: EA : AB; therefore CA : AD :: EA : AB (11. 5.), wherefore the sides of the triangles ABC, ADE about the equal angles are reciprocally proportional.

But, let the sides of the triangles ABC, ADE, about the equal angles be reciprocally proportional, viz. CA to AD as EA to AB; the triangle ABC is equal to the triangle ADE.

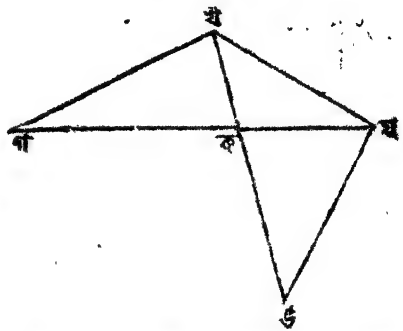
Having joined BD as before; because CA : AD :: EA : AB; and since CA : AD :: triangle ABC : triangle BAD (1. 6.); and also EA : AB :: triangle EAD : triangle BAD (11. 5.); therefore triangle ABC : triangle BAD :: triangle EAD : triangle BAD; that is, the triangles ABC, EAD have the same ratio to the triangle BAD, wherefore, the triangle ABC is equal (9. 6.) to the triangle EAD. Therefore, "equal triangles," &c. Q. E. D.

### PROP XVI. THEOR.

*If four straight lines be proportionals, the rectangle contained by the extremes is equal to the rectangle*

এ দুই ত্রিভুজ এমন করিয়া স্থাপন কর যেন গক এবং কঘ :

দুই বাহু এক সরল রেখায় হয় তাহাতে ওক এবং কখও এক সরল রেখায় হইবে (৫১৪) খঘ সংযুক্ত কর। কখগ ত্রিভুজ কঘও সমান এবং খকঘ অন্য এক ত্রিভুজ একা-  
রণ কখগ ত্রিভুজ :



খকঘ :: কঘও ত্রিভুজ : খকঘ। পরন্তু কখগ : খকঘ :: গক : কঘ এবং কঘও : খকঘ :: ওক : কখ সুতরাং গক : কঘ :: ওক : কখ (৫১১) অতএব কখগ কঘও ত্রিভুজের সমানঃ কোণের পার্শ্ব বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় সপ্রমাণ হইল।

অধিকন্তু কখগ কঘও ত্রিভুজের সমানঃ কোণের পার্শ্ব বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় অর্থাৎ গক যথা কঘ সম্বন্ধে ওক তথা কখ সম্বন্ধে কল্পনা কর তাহাতে কখগ কঘও ত্রিভুজ পরস্পর সমান উপপন্ন হইবে।

পূর্ববৎ খঘ সংযুক্ত কর। গক : কঘ :: ওক : কখ এবং গক : কঘ :: ত্রিভুজ কখগ : ত্রিভুজ খকঘ (৩১১) এবং ওক : কখ :: কঘও ত্রিভুজ : খকঘ একারণ ত্রিভুজ কখগ : ত্রিভুজ খকঘ :: ত্রিভুজ কঘও : ত্রিভুজ খকঘ (৫১১) অর্থাৎ খকঘ ত্রিভুজ সম্বন্ধে কখগ কঘও দুই ত্রিভুজের সমান নিম্নপত্তি পরি-  
মাণ অতএব কখগ ত্রিভুজ কঘও ত্রিভুজের সমান সপ্রমাণ হইল (৫১২) একারণ সমানঃ ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এ হলে উপপাদ্য।

১৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

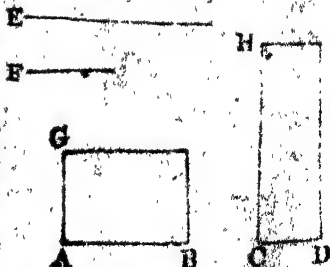
চারি সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে দুই প্রান্ত রেখার

*contained by the means: And if the rectangle contained by the extremes be equal to the rectangle contained by the means, the four straight lines are proportionals:*

Let the four straight lines, AB, CD, E, F be proportionals, viz. as AB to CD, so is E to F; the rectangle contained by AB and F is equal to the rectangle contained by CD and E.

From the points A, C draw (11. 1.) AG, CH at right angles to AB, CD; and make AG equal to F, and CH equal to E, and complete the parallelograms BG, DH. Because  $AB : CD :: E : F$ ; and since  $E = CH$ , and  $F = AG$ ,  $AB : CD :: CH : AG$ ; (7. 5.) therefore the sides of the parallelograms BG, DH about the equal angles are reciprocally proportional; but parallelograms which have their sides about equal angles reciprocally proportional, are equal to one another (14. 6.); therefore the parallelogram BG is equal to the parallelogram DH; and the

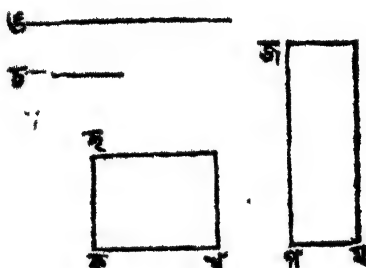
parallelogram BG is contained by the straight lines AB and F; because AG is equal to F; and the parallelogram DH is contained by CD and E, because CH is equal to E; therefore the rectangle contained by the straight lines AB and F is equal to that which is contained by CD and E.



আয়ত দুই মধ্য রেখার আয়ত তুল্য হইবে। তথা দুই প্রান্ত রেখার আয়ত দুই মধ্য রেখার আয়তের সমান হইলে ঐ চারি সরল রেখা অমুপাতীয় হইবে।

কথ গঘ ও এবং চ এই চারি সরল রেখা অমুপাতীয় অর্থাৎ কথ যথা গঘ সম্বন্ধে ও তথা চ সম্বন্ধে কল্পনা কর তাহাতে কথ এবং চ সরল রেখার আয়ত গঘ এবং ও রেখার আয়ত তুল্য হইবে।

ক এবং গ বিস্তৃত্তে কথ  
এবং গঘ সরল রেখার  
লম্বভাবে কছ এবং  
গজ নিষ্কাশন কর  
(১।১১) এবং কছ  
সরল রেখাকে চ সমান  
আয় গজ সরল রেখা-



কে ও সমান করিয়া খছ ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্র পূর্ণ কর। কথ : গঘ :: ও : চ এবং ও = গজ ও চ = কছ একারণ কথ : গঘ :: গজ : কছ (৫।৭) সুতরাং খছ ঘজ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান কোণের পার্শ্ব বাহ উভয়তঃ অমুপাতীয় নিশ্চিত হইল পরন্তু যেই সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান কোণের পার্শ্ব বাহ উভয়তঃ অমুপাতীয় তাহারা পরস্পর সমান হয় (৬।১৪) অতএব খছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান উপপন্ন হইল। আর কছ চ সমান প্রযুক্ত খছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কথ এবং চ সরল রেখার আয়ত এবং গজ ও সমান প্রযুক্ত ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গঘ এবং ও সরল রেখার আয়ত অতএব কথ এবং চ সরল রেখার আয়ত গঘ এবং ও সরল রেখার আয়ত তুল্য সপ্রমাণ হইল।

And, if the rectangle contained by the straight lines AB, F, be equal to that which is contained by CD, E; these four lines are proportionals, viz. AB is to CD, as E to F.

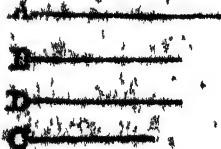
The same construction being made, because the rectangle contained by the straight lines AB, F is equal to that which is contained by CD, E, and the rectangle BG is contained by AB, F, because AG is equal to F and the rectangle DH by CD, E, because CH is equal to E; therefore the parallelogram BG is equal to the parallelogram DH; and they are equiangular: but the sides about the equal angles of equal parallelograms are reciprocally proportional (14. 6.): wherefore  $AB : CD :: CH : AG$ ; but  $CH = E$ , and  $AG = F$ , therefore  $A : B :: CD : E$ . "Wherefore, if four," &c. Q. E. D.

### PROP. XVII. THEOR.

*If three straight lines be proportionals, the rectangle contained by the extremes is equal to the square of the mean: And if the rectangle contained by the extremes be equal to the square of the mean, the three straight lines are proportionals.*

Let the three straight lines A, B, C be proportionals, viz. as A to B, so is B to C; the rectangle contained by A, C is equal to the square of B.

Take D equal to B: and because as A to B so is B to C, and B is equal to D; A is (7. 5.) to B, as D to C: but, if four straight lines be proportionals, the rectangle contained by the extremes is equal to that which is contained by the means (16. 6.): therefore the rectangle A. C = the rectangle B. D; but the rectangle B. D is equal to the square of B, because



অপিচ কথ এবং চ এই দুই সরল রেখার আয়ত গণ এবং  
ও এই দুই রেখার আয়ত তুল্য করিলে ঐ চারি সরল  
রেখা অমুপাতীয় অর্থাৎ কথ যথা গণ সম্বন্ধে ও তুল্য  
সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইবে ।

পূর্ববৎ অঙ্কপাত কর। কথ এবং চ রেখার আয়ত গণ  
এবং ও রেখার আয়ত তুল্য এবং কছ চ সমান প্রযুক্ত খছ  
ক্ষেত্র কথ এবং চ রেখার আয়ত সপ্রমাণ হইতেছে তথা গজ  
ও সমান প্রযুক্ত ঘজ ক্ষেত্র গণ এবং ও রেখার আয়ত নির্ণীত  
হইল অতএব খছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের  
সমান আর তাহার সমান কোনিও বটে অধিকন্তু সমান ২ সমা-  
নান্তরাল ক্ষেত্রের সমান ২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অমু-  
পাতীয় হয় (৩।১৪) অতএব কথ : গণ :: গজ : কছ পরন্তু  
গজ = ও এবং কছ = চ একারণ কথ : গণ :: ও : চ । অতএব  
চারি সরল রেখা ইত্যাদি । ইহাই এখানে উপপাদ্য ।

### ১৭ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

তিন সরল রেখা অমুপাতীয় হইলে দুই প্রান্ত রেখার আয়ত  
যথা রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য হয় । তথা দুই প্রান্তস্থ সরল  
রেখার আয়ত যথা রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য হইলে ঐ তিন  
সরল রেখা অমুপাতীয় হয় ।

ক থ গ এই তিন সরল রেখা অমুপাতীয় অর্থাৎ ক যথা থ  
সম্বন্ধে থ তথা গ সম্বন্ধে করিলে কর। ক এবং থ সরল রেখার  
আয়ত থ রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য হইবে ।

থ সমান থ অন্য এক রেখা করিলে কর। ক যথা থ সম্বন্ধে  
থ তথা গ সম্বন্ধে এবং থ য \_\_\_\_\_ ক  
পরস্পর সমান অতএব ক যথা থ \_\_\_\_\_ থ  
সম্বন্ধে থ তথা গ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইল \_\_\_\_\_ থ  
(১৭) অধিকন্তু চারি সরল রেখা অমু- \_\_\_\_\_ গ  
পাতীয় হইলে দুই প্রান্তস্থ রেখার

$B=D$ ; therefore the rectangle  $A.C$  is equal to the square of  $B$ .

And, if the rectangle contained by  $A, C$  be equal to the square of  $B$ ;  $A : B :: B : C$ .

The same construction being made, because the rectangle contained by  $A.C$  is equal to the square of  $B$ , and the square of  $B$  is equal to the rectangle contained by  $B.D$ , because  $B$  is equal to  $D$ ; therefore the rectangle contained by  $A.C$  is equal to that contained by  $B.D$ ; but if the rectangle contained by the extremes be equal to that contained by the means, the four straight lines are proportionals (16. 6.): therefore,  $A : B :: D : C$ , but  $B=D$ ; wherefore  $A : B :: B : C$ . Therefore, "if three straight lines," &c. Q. E. D.

### PROP. XVIII. PROB

*Upon a given straight line to describe a rectilineal figure similar, and similarly situated, to a given rectilineal figure.*

Let  $AB$  be the given straight line, and  $CDEF$  the given rectilineal figure of four sides; it is required, upon the given straight line  $AB$ , to describe a rectilineal figure similar, and similarly situated to  $CDEF$ .

Join  $DF$ , and at the points  $A, B$  in the straight line  $AB$ , make (23. 1.) the angle  $BAG$  equal to the angle at  $C$ , and the angle  $ABG$  equal to the angle  $CDF$ ; therefore the remaining angle  $CFD$  is equal to the remaining angle  $AGB$  (32. 1.): wherefore the triangle  $FCI$  is equiangular to the triangle  $GAB$ ; Again, at the points  $G, B$  in the straight line  $GB$ , make (23. 1.) the angle  $BGH$  equal to the angle  $DFE$ , and the angle  $GBH$

আয়ত দুই মধ্যস্থ রেখার আয়ত তুল্য হয় (৩।১৬) অতএব  
ক.গ আয়ত = খ.ঘ কিন্তু খ = ঘ একারণ খ.ঘ আয়ত খ  
সমচতুর্ভুজ তুল্য অতএব ক.গ আয়ত খ সমচতুর্ভুজের সমান।

অপিচ যদি ক.গ আয়ত খ সমচতুর্ভুজের সমান কল্পনা  
কর তবে ক : খ :: খ : গ উপপন্ন হইবে।

পূর্ববৎ অঙ্কপাত কর। ক.গ আয়ত খ সমচতুর্ভুজ তুল্য  
এবং খ ঘ পরস্পর সমান হওয়াতে খ সমচতুর্ভুজ খ.ঘ আয়ত  
তুল্য অতএব ক.গ আয়ত খ.ঘ আয়তের সমান অধিকন্তু  
প্রাপ্ত দুই সরল রেখার আয়ত মধ্যস্থ দুই বেখার আয়ত  
তুল্য হইলে চারি রেখা অমুপাতীয় হয় (৩।১৬) অতএব ক :  
খ :: ঘ : গ পরন্তু খ = ঘ একারণ ক : খ :: খ : গ অতএব  
তিন সরল রেখা ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

### ১৮ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

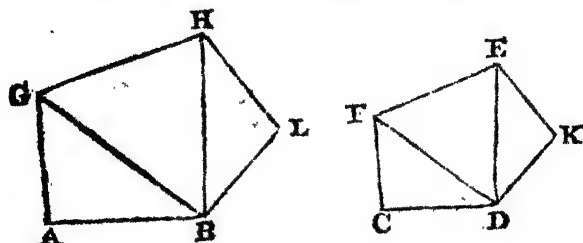
এক নির্দিষ্ট সরল বৈধিক ক্ষেত্রের সদৃশ এবং তদ্রূপে  
স্থাপিত অন্য এক সরল বৈধিক ক্ষেত্র নির্দিষ্ট সরল রেখা-  
পরি নিক্ষেপন করিতে হইবে।

কথ নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং গঘণ্ড নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ সরল  
বৈধিক ক্ষেত্র, কথ সরল রেখার উপর গঘণ্ড সদৃশ এবং  
তদ্রূপে স্থাপিত এক সরল বৈধিক ক্ষেত্র নিক্ষেপন করিতে  
হইবে।

যচ সংযুক্ত কর এবং কথ সরল রেখার ক বিন্দুতে খকছ  
কোণ গ কোণ সমান এবং খ বিন্দুতে কখছ কোণ গঘচ সমান



equal to FDE ; therefore the remaining angle FED is



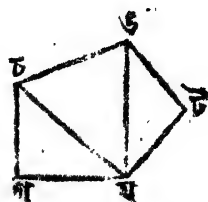
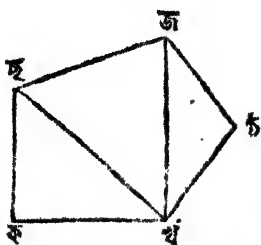
equal to the remaining angle GHB, and the triangle FDE equiangular to the triangle GBH : then, because the angle AGB is equal to the angle CFD, and BGH to DFE, the whole angle AGH is equal to the whole CFE : for the same reason, the angle ABH is equal to the angle CDE ; also, the angle at A is equal to the angle at C, and the angle GHB to FED : Therefore the rectilineal figure ABHG is equiangular to CDEF : But likewise these figures have their sides about the equal angles proportionals : for the triangles GAB, FCD being equiangular,

$BA : AG :: DC : CF$  (4. 6.) ; for the same reason,  $AG : GB :: CF : FD$  ; and because of the equiangular triangles, BGH, DFE,  $GB : GH :: FD : FE$  ; therefore *ex æquali* (22. 5.),  $AG : GH :: CF : FE$ . In the same manner, it may be proved, that

$AB : BH :: CD : DE$ . Also (4. 6.),

$GH : HB :: FE : ED$ . Wherefore, because the rectilineal figures ABHG, CDEF are equiangular, and have their sides about the equal angles proportionals, they are similar to one another (Def. 1. 6.)

করিয়া নি-  
ষ্কাশন কর  
(১২৩) তা-  
হাতে অব-  
শিষ্ট গচঘ  
কোণ কছখ  
সমান হইবে



(১৩২) অতএব চগঘ ত্রিভুজ ছকখ ত্রিভুজের সমান কোণি।  
পুনশ্চ খহ রেখাংশ ছ বিন্দুতে খহজ কোণ ঘচঙ কোণ সমান  
এবং খ বিন্দুতে ছখজ কোণ চঘঙ সমান করিয়া নিষ্কাশন  
কর (১২৩) তাহাতে অবশিষ্ট ছজখ কোণ চঙঘ কোণের  
সমান হইবে অতএব ছখজ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান  
কোণি। অপর কছখ কোণ গচঘ সমান এবং খহজ কোণ  
ঘচঙ সমান তন্নিমিত্ত সমুদয় কছজ সমুদয় গচঙ কোণ তুল্য।  
তদ্রূপ সমুদয় কখজ কোণও গঘঙ সমান উপপন্ন হইবে।  
অপর ক কোণ গ সমান ও ছজখ কোণ ঘঙচ সমান পূর্বে  
দর্শিত হইয়াছে অতএব কখজছ সরল রৈখিক ক্ষেত্র গঘঙচ  
ক্ষেত্রের সমান কোণি সপ্রমাণ হইল। ঐ ক্ষেত্রের সমান  
কোণের পার্শ্বস্থ বাহুও অনুপাতীয় সপ্রমাণ হইবে কেননা  
কখহ গঘচ এই দুই ত্রিভুজ সমানকোণি হওয়াতে

খক : কছ :: ঘগ : গচ (৬৪) ঐ কারণ

কচ : ছখ :: গচ : চঘ । এবং খহজ ঘঙচ  
সমান কোণি ত্রিভুজ হওয়াতে ছখ : ছজ :: চঘ : চঙ অতএব  
(১২২) সামান্যতঃ কছ : ছজ :: গচ : চঙ। তদ্রূপ কখ :  
খজ :: গঘ : ঘঙ এবং ছজ : জখ :: চঙ : ঙঘ উপপন্ন  
হইবে। অতএব কখজছ এবং গঘঙচ সরল রৈখিক ক্ষেত্র  
সমান কোণি এবং তাহারদের সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু  
অনুপাতীয় হওয়াতে তাহারা সদৃশ শব্দ বাচ্য হইল (৬১)।

Next, Let it be required to describe upon a given straight line AB, a rectilineal figure, similar and similarly situated to the five-sided rectilineal figure CDKEF. Join DE, and upon the given straight line AB describe the rectilineal figure ABHG similar, and similarly situated to the quadrilateral figure CDEF, by the former case; and at the points B, H in the straight line BH, make the angle HBL equal to the angle EDK, and the angle BHL equal to the angle DFK; therefore the remaining angle at K is equal to the remaining angle at L; and because the figures ABHG, CDEF are similar, the angle GHB is equal to the angle FED, and BHL is equal to DFK; wherefore the whole angle GHL is equal to the whole angle FEK; for the same reason, the angle ABL is equal to the angle CDK; therefore the five-sided figures AGHLB, CFEKD are equiangular; and because the figures AGHB, CFED are similar, GH is to HB as FE to ED; and as HB to HL, so is ED to EK (4. 6.); therefore *ex æquali* (22. 5.), GH is to HL, as FE to EK; for the same reason, AB is to BL, as CD to DK; and BL is to LH, as (4. 6.) DK, KE, because the triangles BLH, DKE are equiangular, therefore, because the five-sided figures AGHLB, CFEKD, are equiangular, and have their sides about the equal angles proportionals, they are similar to one another: and in the same manner, a rectilineal figure of six, or more, sides may be described upon a given straight line similar to one given, and so on. Which was to be done.

### PROP. XIX. THEOR.

*Similar triangles are to one another in the duplicate ratio of their homologous sides.*

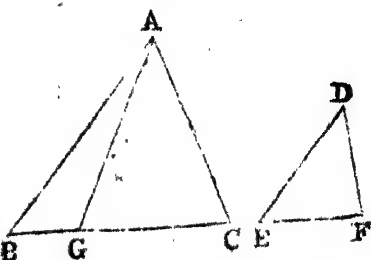
অনন্তর কথ নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর গঘটগুচ পঞ্চভূজের সদৃশ এবং তদ্রূপে স্থাপিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র নিক্ষেপন করিতে আকাঙ্ক্ষা হউক ।

যদি সংযুক্ত কর এবং পূর্বোক্ত ধারায় কথ নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর গঘটগুচ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ এবং তদ্রূপে স্থাপিত কথজঙ্ঘ ক্ষেত্র নিক্ষেপন কর, এবং জথ রেখাস্থ জ বিন্দুতে খজ্জ ঠ কোণ ঘগুট সমান এবং খ বিন্দুতে জখ ঠ কোণ গঘট সমান করিয়া নিক্ষেপন কর তাহাতে অবশিষ্ট ঠ কোণ ট সমান হইবে । অপর কথজঙ্ঘ এবং গঘটগুচ দুই ক্ষেত্র সদৃশ হওয়াতে জজখ কোণ চগুঘ কোণের সমান হইবে অতএব সমুদয় জজ ঠ কোণ সমুদয় চগুট কোণের সমান উপপন্ন হইল । তদ্রূপ কথ ঠ কোণ গঘট সমান সপ্রমাণ হইবে অতএব কথজঙ্ঘ পঞ্চভূজ গঘটগুচ পঞ্চভূজের সমান কোনি নিশ্চিত হইল । অপর কথজঙ্ঘ ক্ষেত্র গঘটগুচ ক্ষেত্রের সদৃশ প্রস্তুত হইল যথা জথ সম্বন্ধে উক্ত তথা গুঘ সম্বন্ধে হইবে এবং জথ যথা জ ঠ সম্বন্ধে উক্ত তথা খ ঠ সম্বন্ধে ( ৩৫ ) অতএব ( ৫১২২ ) মানানাতঃ জজ যথা জ ঠ সম্বন্ধে চগু তথা গুট সম্বন্ধে । তদ্রূপ কথ যথা খ ঠ সম্বন্ধে গঘ তথা ঘট সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে এবং খ ঠ যথা ঠজ সম্বন্ধে ঘট তথা টগ সম্বন্ধে নির্ণীত আছে কেননা খ ঠজ ত্রিভুজ ঘটগু ত্রিভূজের সমান কোনি । অতএব কথজঙ্ঘ পঞ্চভূজ গঘটগুচ পঞ্চভূজের সমানকোনি এবং তাহারদের সমান ২ কোণের পার্থক্য বাহ্য অস্থপাতীয় হওয়াতে তাহারা সদৃশ শব্দ বাচ্য হইল । তদ্রূপ নির্দিষ্ট বড়ভূজ অথবা ততোধিক বাহ্য বিশিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ক্ষেত্র নির্দিষ্ট রেখার উপর নিক্ষেপিত করা যাইতে পারে । ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য ।

### ১৯ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

যে ত্রিভূজ সদৃশ তাহারা সবর্গীয় বাহ্যর বিঘাত নিম্পত্তি পরিমাণে পরস্পর অস্থপাতীয় ।

Let  $ABC$ ,  $DEF$  be similar triangles, having the angle  $B$  equal to the angle  $E$ , and let  $AB$  be to  $BC$ , as  $DE$  to  $EF$ , so that the side  $BC$  is homologous to  $EF$  (Def. 13. 5.); the triangle  $ABC$

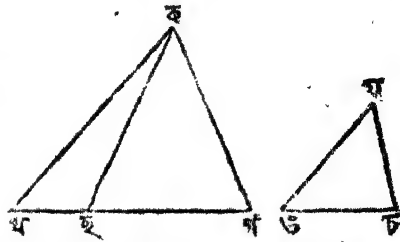


has to the triangle  $DEF$ , the duplicate ratio of that which  $BC$  has to  $EF$ .

Take  $BG$  a third proportional to  $BC$  and  $EF$  (11. 6.) or such that

$BC : EF :: EF : BG$ , and join  $GA$ . Then  
 $AB : BC :: DE : EF$ , alternately (10. 5.),  
 $AB : DE :: BC : EF$ ; but  
 $BC : EF :: EF : BG$ ; therefore (11. 5.)  
 $AB : DE :: EF : BG$ ; wherefore the sides  
of the triangles  $ABG$ ,  $DEF$ , which are about the equal  
angles, are reciprocally proportional; but triangles  
which have the sides about two equal angles reciprocally  
proportional, are equal to one another (15. 6.);  
therefore, the triangle  $ABG$  is equal to the triangle  
 $DEF$ ; and because that  $BC$  is to  $EF$ , as  $EF$  to  $BG$ ;  
and that if three straight lines be proportionals, the first  
has to the third the duplicate ratio of that which it has to  
the second;  $BC$  therefore has to  $BG$  the duplicate  
ratio of that which  $BC$  has to  $EF$ . But as  $BC$  to  $BG$ ,  
so is (1. 6.) the triangle  $ABC$  to the triangle  $ABG$ ;  
therefore the triangle  $ABC$  has to the triangle  $ABG$   
the duplicate ratio of that which  $BC$  has to  $EF$ ; and  
the triangle  $ABG$  is equal to the triangle  $DEF$ ; where-

কখগ ঘঙচ দুই সদৃশ ত্রিভুজ, তন্মধ্যে খ কোণ ও কোণের  
সমান এবং কখ  
যথা খগ সম্বন্ধে ঘঙ  
তথা ওচ সম্বন্ধে,  
সুতরাং খগ বাহু  
ওচ বাহুর সব-  
(৫১৫) (১৩ সংজ্ঞা)  
খগ ওচ বাহুর পর-  
স্পর নিষ্পত্তির দ্বিঘাত পরিমাণে কখগ এবং ঘঙচ ত্রিভুজ পর-  
স্পর অন্তর্পাতীয় হইবে।



খগ এবং ওচ দুই রেখার খহ তৃতীয় অন্তর্পাতীয় বহুলা কর  
( ৬১১ ) অর্থাৎ খগ : ওচ :: ওচ : খহ। পরে কহ সংযুক্ত  
কব অপর কখ : খগ :: ঘঙ : ওচ তদ্বিনিমিত্ত বিনিময় নিষ্প-  
ত্তিতে ( ৫১৬ ) কখ : ঘঙ :: খগ : ওচ পরন্তু

খগ : ওচ :: ওচ : খহ একারণ ( ৫১১ )

কখ : ঘঙ :: ওচ : খহ অতএব কখহ

ঘঙচ ত্রিভুজে সমান২ কোণের পার্শ্ব বাহু উভয়তঃ অন্তর্পা-  
তীয়। অধিকন্তু দুই ত্রিভুজের দুই সমান২ কোণের পার্শ্ব বাহু  
উভয়তঃ অন্তর্পাতীয় হইলে তাহার সমান হয় ( ৬১৫ )

অতএব কখহ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান। অপর খগ যথা  
ওচ সম্বন্ধে ওচ তথা খহ সম্বন্ধে এবং তিন সরল রেখা অন্-  
পাতীয় হইলে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ  
তৃতীয় সম্বন্ধে তদ্বিঘাত। অতএব খগ রেখার ওচ সহিত  
যে নিষ্পত্তি পরিমাণ খহ সহিত তাহার তদ্বিঘাত। পরন্তু  
খগ যথা খহ সম্বন্ধে কখগ ত্রিভুজ তথা কখহ ত্রিভুজ সম্বন্ধে  
( ৬১১ ) অতএব খগ সরল রেখার ওচ সহিত যে নিষ্পত্তি  
পরন্তু কখগ ত্রিভুজের কখহ সহিত তাহার দ্বিঘাত সম্বন্ধ এবং

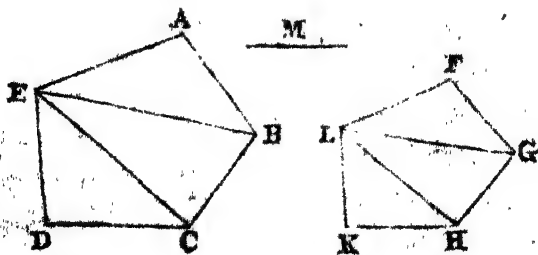
fare also the triangle  $ABC$  has to the triangle  $DEF$  the duplicate ratio of that which  $BC$  has to  $EF$ . Therefore, similar triangles, &c. Q. E. D.

COR. From this it is manifest, that if three straight lines be proportionals, as the first is to the third, so is any triangle upon the first to a similar, and similarly described triangle upon the second.

### PROP. XX. THEOR.

*Similar polygons may be divided into the same number of similar triangles, having the same ratio to one another that the polygons have; and the polygons have to one another the duplicate ratio of that which their homologous sides have.*

Let  $ABCDE$ ,  $FGHKL$  be similar polygons, and let  $AB$  be the homologous side to  $FG$ : the polygons  $ABCDE$ ,  $FGHKL$  may be divided into the same number of similar triangles, whereof each has to each the same ratio which the polygons have; and the polygon  $ABCDE$  has to the polygon  $FGHKL$  a ratio duplicate of that which the side  $AB$  has to the side  $FG$ .



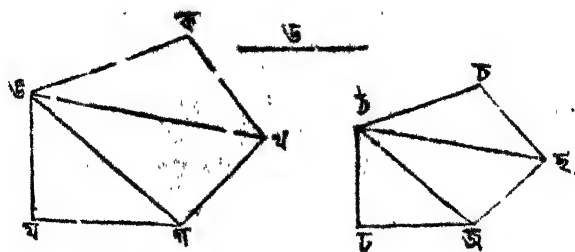
কথন ত্রিভুজ খগচ ত্রিভুজের সমান হওয়াতে খগ রেখার গুচ সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ কথন ত্রিভুজের খগচ ত্রিভুজের সহিত তাহার দ্বিঘাত সম্বন্ধ। অতএব যে২ ত্রিভুজ ইত্যাদি। ইহাই এখানে উপপাদ্য।

অন্যমান । এখানে নিশ্চয় বোধ হইতেছে যে তিন সরল রেখা আন্তর্গামী হইলে প্রথমের তৃতীয় সহিত যেমত নিষ্পত্তি সম্বন্ধ প্রথমোপরি নিষ্কাশিত ত্রিভুজের দ্বিতীয়োপরি নিষ্কাশিত তৎসদৃশ ত্রিভুজের সহিত তাদৃশ সম্বন্ধ।

## ২০ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যে২ বহুভুজ ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ তাহার সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত হইতে পারে এবং সে সকল ত্রিভুজের বহুভুজ ক্ষেত্রের ন্যায় পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ এবং সবগীয় বাহুর পরস্পর যে নিষ্পত্তি ঐ বহুভুজ ক্ষেত্রের পরস্পর সম্বন্ধ তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে নিষ্পত্তি।

কথনখগচ এবং চহজচট দুই সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্র এবং কথ বাও চহ বাহুর সবগীয়। কথনখগচ চহজচট সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারিবে এবং ত্রিভুজ সকলের পরস্পর ঐ দুই বহুভুজ ক্ষেত্রের তুল্য নিষ্পত্তি সম্বন্ধ আর কথ বাহুর চহ বাহুর সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ কথনখগচ বহুভুজের চহজচট বহুভুজ সম্বন্ধ তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে নিষ্পত্তি উপপন্ন হইবে।





Join BE, EC, GL, LH : and because the polygon ABCDE is similar to the polygon FGHKL, the angle BAE is equal to the angle GFL (Def. 1. 6.), and  $BA : AE :: GF : FL$  (Def. 1. 6.) : wherefore, because the triangles ABE, FGL, have an angle in one equal to an angle in the other, and their sides about these equal angles proportionals, the triangle ABE is equiangular (6. 6.), and therefore similar to the triangle FGL (4. 6.) : wherefore the angle ABE is equal to the angle FGL : and, because the polygons are similar, the whole angle ABC is equal (Def. 1. 6.) to the whole angle FGH : therefore the remaining angle EBC is equal to the remaining angle LGH : now, because the triangles ABE, FGL are similar,  $EB : BA :: LG : FG$  ; and also because the polygons are similar,

$AB : BC :: FG : GH$  (Def. 1. 6.) ; therefore *ex equali* (22. 5.) ;  $EB : BC :: LG : GH$  ; that is, the sides about the equal angles EBC, LGH are proportionals ; therefore (6. 6.) the triangle EBC is equiangular to the triangle LGH, and similar to it (4. 6.). For the same reason, the triangle ECD is likewise similar to the triangle LHK ; therefore, the similar polygons ABCDE, FGHKL are divided into the same number of similar triangles.

Also, these triangles have, each to each, the same ratio which the polygons have to one another, the antecedents being ABE, EBC, ECD, and the consequents FGL, LGH, LHK : and the polygon ABCDE has to the polygon FGHKL the duplicate ratio of that which the side AB has to the homologous side FG.

Because the triangle ABE is similar to the triangle FGL, ABE has to FGL the duplicate ratio (19. 6.) of that which the side BE has to the side GL : for the

বাহ্যর চ্ছট সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ খণ্ডগ ত্রিভুজের চ্ছট সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত নিষ্পত্তি পরিমাণ অতএব কথঙ ত্রিভুজ যথা চ্ছট ত্রিভুজ সম্বন্ধে খণ্ডগ ত্রিভুজ তথা ঠছজ সম্বন্ধে (৫।১১) অপর খণ্ডগ ত্রিভুজ চ্ছট ত্রিভুজের সমূহ একারণে গুণ বাহ্যর ঠজ বাহ্য সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ খণ্ডগ ত্রিভুজের চ্ছট ত্রিভুজ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি তদ্রূপ গুণ বাহ্যর ঠজ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি গুণগ ত্রিভুজের ঠজত সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি উপপন্ন হইবে অতএব খণ্ডগ ত্রিভুজ যথা চ্ছট সম্বন্ধে গুণগ তথা ঠজত সম্বন্ধে সমপ্রমাণ হইল । অধিকন্তু পূর্বে উপপন্ন হইয়াছে যে কথঙ ত্রিভুজ যথা চ্ছট সম্বন্ধে গুণগ তথা ঠছজ সম্বন্ধে ত্রিগুণিত কথঙ যথা চ্ছট সম্বন্ধে খণ্ডগ তথা চ্ছট সম্বন্ধে এবং গুণগ, ঠজত সম্বন্ধে । সুতরাং একই অগ্রবর্ত্তি ত্রিভুজ যথা একই পশ্চাবর্ত্তির সম্বন্ধে সমুদয় অগ্রবর্ত্তি তথা সমুদয় পশ্চাবর্ত্তির সম্বন্ধে উপপন্ন হইল অতএব কথঙ ত্রিভুজ যথা চ্ছট সম্বন্ধে কথগমঙ বহুভুজ তথা চ্ছজচ্ছট বহুভুজ সম্বন্ধে নিশ্চিত হইতেছে পরন্তু কথ বাহ্যর চ্ছ সবর্ণীয় বাহ্য সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ কথঙ ত্রিভুজের চ্ছট সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি অতএব কথ বাহ্যর চ্ছ সবর্ণীয় বাহ্য সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ কথগমঙ বহুভুজের চ্ছজচ্ছট বহুভুজ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি । অতএব যের বহুভুজ ক্ষেত্র ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

> অনুমান । তদ্রূপ চারি কিম্বা অন্য কোন সংখ্যক বাহ্য বিশিষ্ট ক্ষেত্র সবর্ণীয় ভূজের দ্বিঘাত পরিমাণে পরস্পর সম্বন্ধে নিষ্পত্তি বিশিষ্ট উপপন্ন হইবে । ত্রিভুজের বিষয়ে পূর্বে ঐরূপ সমপ্রমাণ হইয়াছে অতএব ব্যাপক ভাবে কহা যাইতে পারে যে সরল রৈখিক ক্ষেত্র যাত্রই সবর্ণীয় বাহ্যর দ্বিঘাত পরিমাণে পরস্পর নিষ্পত্তি বিশিষ্ট হয় ।

**COR. 2.** And if to AB, FG, two of the homologous sides, a third proportional M be taken, AB has (Def. 11. 5.) to M the duplicate ratio of that which AB has to FG; but the four-sided figure, or polygon, upon AB has to the four-sided figure, or polygon, upon FG, likewise the duplicate ratio of that which AB has to FG: therefore, as AB is to M, so is the figure upon AB to the figure upon FG, which was also proved in triangles (Cor. 19. 6.) Therefore, universally, it is manifest, that if three straight lines be proportionals, as the first is to the third, so is any rectilineal figure upon the first, to a similar and similarly described rectilineal figure upon the second.

**COR. 3.** Because all squares are similar figures, the ratio of any two squares to one another is the same with the duplicate ratio of their sides; and hence, also any two similar rectilineal figures are to one another as the squares of their homologous sides.

### PROP. XXI. THEOR.

*Rectilineal figures which are similar to the same rectilineal figure, are also similar to one another.*

Let each of the rectilineal figures A, B be similar to the rectilineal figure C: The figure A is similar to the figure B.

Because A is similar to C, they are equiangular, and also have their sides about the equal angles proportion-

খণ্ড গও ছট জট সংযুক্ত কর । অপর কথগঘঙ বহুভুজ চহ-  
জট বহুভুজের সদৃশ একারণ খকঙ কোণ ছট কোণের সমান  
( ৩১২ ) এবং খক : কঙ :: ছট : চট ( ৩১২ ) । অতএব কথঙ  
ছট ত্রিভুজের একই কোণ সমান এবং সমান কোণের পার্শ্বস্থ  
বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে কথঙ ত্রিভুজ ছট ত্রিভুজের সমান  
কোণি ( ৩১৬ ) সুতরাং সদৃশ ( ৩১৪ ) অতএব কথঙ কোণ  
চট কোণের সমান । অধিকন্তু এই দুই বহুভুজ ক্ষেত্র পরস্পর  
সদৃশ হওয়াতে সমুদয় কথগ কোণ সমুদয় চহজ সমান সুতরাং  
অবশিষ্ট ওখগ কোণ ঠহজ সমান । অপর কথঙ চহট ত্রিভুজ  
সদৃশ প্রযুক্ত ওখ : খক :: ঠহ : ছট এবং বহুভুজ ক্ষেত্রের  
সাদৃশ্য হেতুক কথ : খগ :: চহ : ছজ সুতরাং সামা-  
নাতঃ ( ৩১২ ) ওখ : খগ :: ঠহ : ছজ অর্থাৎ ওখগ  
এবং ঠহজ সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় একা-  
রন ( ৩১৬ ) ওখগ ত্রিভুজ ঠহজ ত্রিভুজের সমান কোণি এবং  
সদৃশ ( ৩১৪ ) তদ্রূপ ওগঘ ত্রিভুজ ঠজট ত্রিভুজের সদৃশ উপ-  
পন্ন হইবে অতএব কথগঘঙ এবং চহজট এই উভয় সদৃশ  
বহুভুজ ক্ষেত্র সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হই-  
য়াছে ।

অপিচ ইহাও উপপন্ন হইবে যে এই দুই বহুভুজের পর-  
স্পর সম্বন্ধে যে নিম্পত্তি পরিমাণ উক্ত তিন ত্রিভুজেরও  
পরস্পর সম্বন্ধে ক্রমশঃ সেই নিম্পত্তি পরিমাণ, তাহার মধ্যে  
কথঙ ওখগ ওগঘ অগ্রবর্ত্তি এবং চহট ঠহজ ঠজট পশ্চা-  
দ্বর্ত্তি, এবং কথ বাহুর সবর্গীয় চহ বাহু সম্বন্ধে যে নিম্পত্তি  
পরিমাণ কথগঘঙ বহুভুজের চহজট বহুভুজ সম্বন্ধে তাহার  
দ্বিঘাত পরিমাণ নিম্পত্তি ।

কথঙ ত্রিভুজ চহট ত্রিভুজের সদৃশ হওয়াতে খঙ বাহুর  
ছট সম্বন্ধে যে নিম্পত্তি পরিমাণ কথঙ ত্রিভুজের চহট সম্বন্ধে  
তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিম্পত্তি ( ৩১২ ) এই কারণ খঙ

same reason, the triangle BEC has to GLH the duplicate ratio of that which BE has to GL; therefore, as the triangle ABE to the triangle FGL, so (11. 5.) is the triangle BEC to the triangle GLH. Again, because the triangle EBC is similar to the triangle LGH, EBC has to LGH the duplicate ratio of that which the side EC has to the side LH: for the same reason, the triangle ECD has to the triangle LHK, the duplicate ratio of that which EC has to LH: therefore, as the triangle EBC to the triangle LGH, so is (11. 5.) the triangle ECD to the triangle LHK: but it has been proved, that the triangle EBC is likewise to the triangle LGH, as the triangle ABE to the triangle FGL. Therefore, as the triangle ABE is to the triangle FGL, so is the triangle EBC to the triangle LGH, and the triangle ECD to the triangle LHK: and therefore, as one of the antecedents to one of the consequents, so are all the antecedents to all the consequents (12. 5.) Wherefore as the triangle ABE to the triangle FGL, so is the polygon ABCDE to the polygon FGHLK: but the triangle ABE has to the triangle FGL, the duplicate ratio of that which the side AB has to the homologous side FG. Therefore also the polygon ABCDE has to the polygon FGHLK, the duplicate ratio of that which AB has to the homologous side FG. Wherefore, similar polygons &c.  
Q. E. D.

COR. I. In like manner, it may be proved, that similar figures of four sides, or of any number of sides, are one to another in the duplicate ratio of their homologous sides: and the same has already been proved of triangles; therefore, universally, similar rectilineal figures are to one another in the duplicate ratio of their homologous sides.

২ অনুমান । কথ চছ দুই সবর্গীয় বাহুর যদি তৃতীয় অনু-  
পাতীয় ড কল্পনা করা যায় তবে ( ৫।১১ সংজ্ঞা ) কথ যথা  
চছ সম্বন্ধে কথ তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে ড সম্বন্ধে সপ্রমাণ  
হইবে পরন্তু কথ যথা চছ সম্বন্ধে কথ উপরিস্থ চতুর্ভুজ অথবা  
বহুভুজ ক্ষেত্র তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে চছ উপরিস্থ চতুর্ভুজ  
অথবা বহুভুজ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে নিশ্চিত হইতেছে সুতরাং  
ত্রিভুজের বিষয়ে যদ্রূপ সপ্রমাণ হইয়াছে ( ৬।১১ অনু )  
তদ্রূপ কথ যথা ড সম্বন্ধে কথ উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা চছ উপ-  
রিস্থ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে । অতএব ব্যাপক ভাবে কহা যাইতে  
পারে যে তিন সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে প্রথম যথা  
তৃতীয়ের সম্বন্ধে প্রথমোপরি নিষ্কাশিত সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র  
তথা দ্বিতীয়োপরি তাদৃশ রূপে নিষ্কাশিত সরল ত্রৈখিক  
ক্ষেত্রের সম্বন্ধে অনুমেয় হইবেক ।

৩ অনুমান । সমচতুর্ভুজ নাত্রই সদৃশ ক্ষেত্র একারণ দুই  
সমচতুর্ভুজের পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ আপন২ বাহুর সম্ব-  
ন্ধে দ্বিঘাত পরিমাণ এবং দুই সদৃশ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের  
পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ তাহারদের সবর্গীয় বাহুর সমচতু-  
র্ভুজের তুল্য ।

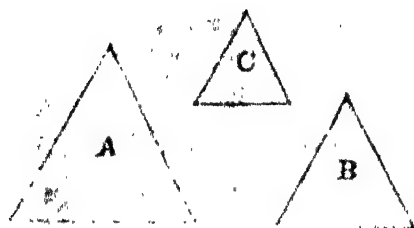
## ২১ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

যে২ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র সকল এক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের  
সদৃশ তাহার পরস্পরও সদৃশ ।

ক এবং খ দুই সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র প্রত্যেকে গ সরল  
ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ কল্পনা কর তাহাতে ক এবং খ ক্ষেত্র  
পরস্পর সদৃশ হইবে ।

ক এবং গ সদৃশ একারণ তাহার সমান কোণি এবং  
তাহারদের সমান২ কোণের পার্থক্য বাহু অনুপাতীয়

als (Def. I. 6.) Again, because B is similar to C, they are equiangular, and have their sides about the equal angles proportionals (Def. I. 6.) :



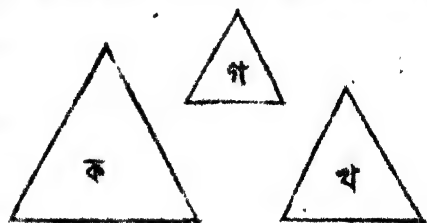
therefore the figures A, B are each of them equiangular to C, and have the sides about the equal angles of each of them, and of C, proportionals. Wherefore the rectilineal figures A and B are equiangular (I. Ax. I.), and have their sides about the equal angles proportionals (II. 5.). Therefore, A is similar (Def. I. 6.) to B. Q. E. D.

### PROP. XXII. THEOR.

*If four straight lines be proportionals, the similar rectilineal figures similarly described upon them shall also be proportionals; and if the similar rectilineal figures similarly described upon four straight lines be proportionals, those straight lines shall be proportionals.*

Let the four straight lines AB, CD, EF, GH be proportionals, viz. AB to CD, as EF to GH; and upon AB, CD let the similar rectilineal figures KAB, LCD be similarly described; and upon EF, GH the similar rectilineal figures ME, NH, in like manner; the rectilineal figure KAB is to LCD, as ME to NH.

(৩।১ সংজ্ঞা)। তথা খ এবং গ সদৃশ হওয়াতে তাহারাত্ত  
 প্রমাণ কোণি এবং তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ  
 বাহু অনুপাতীয়  
 অতএব ক এবং  
 খ প্রত্যেকে গ  
 ক্ষেত্রের সমান  
 কোণি এবং তা-  
 হারদের ও গ ক্ষে



ত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় সুতরাং  
 (১।১ স্বং সা) ক এবং খ পরস্পর সমান কোণি এবং  
 তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহুও অনুপাতীয়  
 (৫।১১) অতএব ক এবং খ পরস্পর সদৃশ। ইহাই এত্নে  
 উপপাদ্য।

## ২২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

স্মরি সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে যে২ সদৃশ সরল  
 রৈখিক ক্ষেত্র তাহারদের উপর একাকারে নিষ্কাশিত হয় সে  
 সকলও অনুপাতীয় হইবে এবং চারি সরল রেখার উপর পর-  
 স্পর সদৃশ ও একাকারে নিষ্কাশিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র অনু-  
 পাতীয় হইলে সে সকল রেখাও অনুপাতীয় হইবে।

কথ গণ্ড ওচ ছজ্জ চারি সরল রেখা অনুপাতীয় জ্ঞান কর  
 অর্থাৎ কথ যথা গণ্ড সম্বন্ধে ওচ তথা ছজ্জ সম্বন্ধে কল্পনা কর এবং  
 কথ গণ্ড রেখার উপর টকথ ও ঠগণ্ড দুই সদৃশ সরল রৈখিক  
 ক্ষেত্র একাকারে অঙ্কিত হউক তথা ওচ ছজ্জ রেখার উপর ডচ  
 ওচ দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্র তদ্রূপ অঙ্কিত হউক তাহাতে  
 টকথ ক্ষেত্র যথা ঠগণ্ড সম্বন্ধে ডচ তথা ওচ সম্বন্ধে উপপন্ন  
 হইবে।



To AB, CD take a third proportional (11. 6.) X;  
and to EF, GH a third proportional O: and because

AB:CD::EF:GH, and

CD:X::GH:O, (11. 5.) ex æquali (21. 5.),

AB:X::EF:O. But

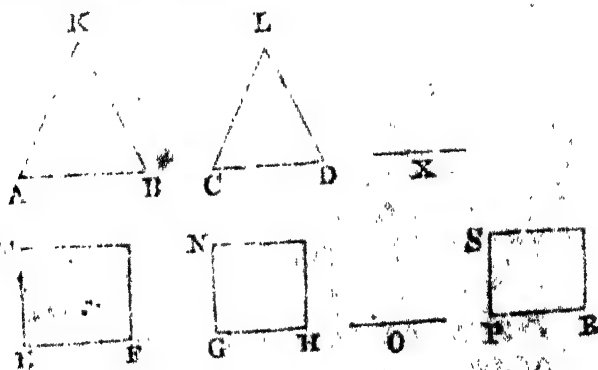
\*AB:X::KAB:LCD; (2. Cor. 20. 6.) and EF:

O::MF:NH: (2. Cor. 20. 6.) therefore KAB:

LCD::MF:NH. (2. Cor. 20. 6.)

And if the figure KAB be to the figure LCD, as the  
figure MF to the figure NH, AB is to CD,  
as EF to GH.

Make (12. 6.) as AB to CD, o EF to PR, and  
upon PR describe (18. 6.) the rectilineal figure SR  
similar, and similarly situated to either of the figures



MF, NH: then, because as AB to CD, so is EF to  
PR, and upon AB, CD are described the similar and  
similarly situated rectilineals KAB, LCD, and upon  
EF, PR, in like manner, the similar rectilineals MF,  
SR: KAB is to LCD, as MF to SR; but by the  
hypothesis, KAB is to LCD, as MF to NH; and  
therefore the rectilineal MF having the same ratio to

কথ গঘ সরল রেখার তৃতীয় অনুপাতীয় এবং ওচ ছজ সরল রেখার ৭ তৃতীয় অনুপাতীয় নির্ণয় কর (৩।১১) অপর

কথ : গঘ :: ওচ : ছজ এবং

গঘ : ভ :: ছজ : ৭ (৫।১১) স্তত্রাং সামান্যতঃ (৩।১১)

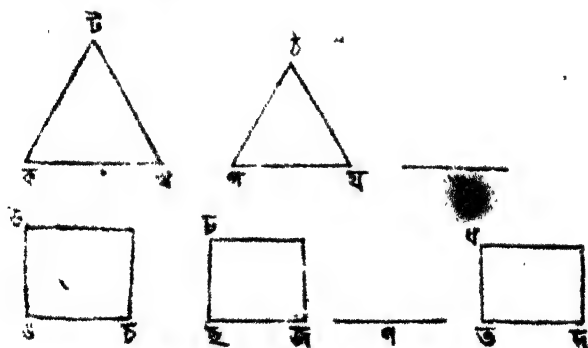
কথ : ভ :: ওচ : ৭ পরন্তু

কথ : ভ :: টকথ : ঠগঘ (৩।২০ দ্বিতীয় অমু) এবং

ওচ : ৭ :: ডচ : ঢজ অতএব

টকথ : ঠগঘ :: ডচ : ঢজ ।

অপিচ যদি টকথ ক্ষেত্র যথা ঠগঘ ক্ষেত্র সম্বন্ধে ডচ ক্ষেত্র যথা ঢজ ক্ষেত্র সম্বন্ধে কল্পিত হয় তবে কথ যথা গঘ সম্বন্ধে ওচ তথা ছজ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে ।



কথ যথা গঘ সম্বন্ধে ওচ তথা তদ সম্বন্ধে কল্পনা কর (৩।১২) এবং তদ রেখার উপর খদ সরল বৈধিক ক্ষেত্র ডচ অথবা ওচ ক্ষেত্র সদৃশ এবং একাকারে স্থাপিত করিয়া নিষ্কাশিত কর (৩।১৩) কথ যথা গঘ সম্বন্ধে ওচ তথা তদ সম্বন্ধে এবং ও গঘ রেখার উপর টকথ ও ঠগঘ সদৃশ এবং একাকারে স্থাপিত সরল বৈধিক ক্ষেত্র নিষ্কাশিত হইয়াছে ও ওচ তদ রেখার উপর ডচ খদ ক্ষেত্র ডাদৃশ রূপে অঙ্কিত হইয়াছে একারণ টকথ যথা ঠগঘ সম্বন্ধে ওচ তথা খদ সম্বন্ধে

each of the two  $NH$ ,  $SR$ , these two are equal (9. 5.) to one another : they are also similar, and similarly situated ; therefore  $GH$  is equal to  $PR$  : and because as  $AB$  to  $CD$ , so is  $EF$  to  $PR$  and because  $PR$  is equal to  $GH$ ,  $AB$  is to  $CD$ , as  $EF$  to  $GH$ . If, therefore, four straight lines, &c. Q. E. D.

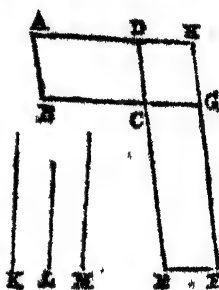
### PROP. XXIII. THEOR.

*Equiangular parallelograms have to one another the ratio which is compounded of the ratios of their sides.*

Let  $AC$ ,  $CF$  be equiangular parallelograms, having the angle  $BCD$  equal to the angle  $ECG$  ; the ratio of the parallelogram  $AC$  to the parallelogram  $CF$  is the same with the ratio which is compounded of the ratios of their sides.

Let  $BC$ ,  $CG$  be placed in a straight line ; therefore

$DC$  and  $CE$  are also in a straight line (14. 1.), complete the parallelogram  $DG$  ; and taking any straight line  $K$ , make (12. 6.) as  $BC$  to  $CG$ , so  $K$  to  $L$  ; and as  $DC$  to  $CE$ , so make (12. 6.)  $L$  to  $M$  : therefore the ratios of  $K$  to  $L$ , and  $L$  to  $M$  are the same with the ratio



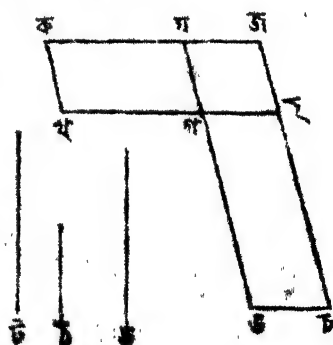
of the sides, or of  $BC$  to  $CG$ , and of  $DC$  to  $CE$ . But the ratio of  $K$  to  $M$  is that which is said to be

সমপ্রমাণ হইল পরন্তু টকথ যথা ঠগয সম্বন্ধে ডচ তথা চজ সম্বন্ধে কল্পনা করা গিয়াছে একারণ ডচ ক্ষেত্রের চজ এবং খয় দুই ক্ষেত্র সম্বন্ধে সমান নিষ্পত্তি পরিমাণ হওয়াতে চজ এবং খদ পরস্পর সমান (৫।১) অধিকন্তু তাহার সাদৃশ এবং সদৃশ রূপে স্থাপিত ও বটে ত্রিগুণিত ছজ এবং তদ পরস্পর সমান । অপর কথ যথা গয সম্বন্ধে ডচ তথা তদ সম্বন্ধে এবং তদ ও চজ পরস্পর সমান একারণ কথ যথা গয সম্বন্ধে ডচ তথা ছজ সম্বন্ধে সমপ্রমাণ হইল । অতএব চারি সরল রেখা ইত্যাদি । ইহাটি এস্থলে উপপাদ্য ।

### ২৩ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

সমানকোণি কএক সমানান্তরাল ক্ষেত্রের বাহু পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ বিশিষ্ট ক্ষেত্রফলের পরিমাণ তাহার যোগোৎপন্ন পরিমাণ তুল্য হইবে ।

কগ গচ সমান কোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র কল্পনা কর তাহার মধ্যে খগয কোণ ওগছ সমান । কগ গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রস্থ বাহুর পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধের যোগ পরিমাণে ঐ দুই ক্ষেত্রের পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ উপপাদ্য হইবে ।



খগ গছ এক সরল রেখায় স্থাপন কর সুতরাং খগ গঙও এক সরল রেখায় হইবে (১।১৪) অপর যদ্ব সমানান্তরাল ক্ষেত্র পূর্ণ কর এবং ট অন্য সরল রেখা নির্দিষ্ট করিয়া খগ যথা গছ সম্বন্ধে ট তথা ঠ সম্বন্ধে কল্পনা কর (৩।১২) এবং খগ যথা

compounded (Def 10. 5.) of the ratios of  $K$  to  $L$ , and  $L$  to  $M$ ; wherefore also  $K$  has to  $M$  the ratio compounded of the ratios of the sides of the parallelograms. Now, because as  $BC$  to  $CG$ , so is the parallelogram  $AC$  to the parallelogram  $CH$  (1.6.); and as  $BC$  to  $CG$ , so is  $K$  to  $L$ , therefore  $K$  is (11. 5.) to  $L$ , as the parallelogram  $AC$  to the parallelogram  $CH$ : again, because as  $DC$  to  $CE$ , so is the parallelogram  $CH$  to the parallelogram  $CF$ : and as  $DC$  to  $CE$ , so is  $L$  to  $M$ ; therefore  $L$  is (11. 5.) to  $M$ , as the parallelogram  $CH$  to the parallelogram  $CF$ : therefore since it has been proved, that as  $K$  to  $L$ , so is the parallelogram  $AC$  to the parallelogram  $CH$ ; and as  $L$  to  $M$ , so the parallelogram  $CH$  to the parallelogram  $CF$ ; ex aequali (22.5.),  $K$  is to  $M$ , as the parallelogram  $AC$  to the parallelogram  $CF$ ; but  $K$  has to  $M$  the ratio, which is compounded of the ratios of the sides; therefore also the parallelogram  $AC$  has to the parallelogram  $CF$  the ratio which is compounded of the ratios of the sides. Wherefore, equiangular parallelograms &c. Q. E. D.

### PROP XXIV. THEOR.

*The parallelograms about the diameter of any parallelogram, are similar to the whole, and to one another.*

Let  $ABCD$  be a parallelogram, of which the diameter is  $AC$ ; and  $EG$ ,  $HK$  the parallelograms about

গঙ সম্বন্ধে ঠ তথা ড সম্বন্ধে কল্পনা কর অতএব ট এবং ঠ মধ্যে যে সম্বন্ধ এবং ঠ ও ড মধ্যে যে সম্বন্ধ তাহা উক্ত দুই ক্ষেত্রের যগ গচ্ছ এবং যগ গঙ বাহ্য মধ্যস্থ সম্বন্ধের সমান হইবে । পরন্তু ট এবং ড মধ্যে যে সম্বন্ধ তাহা ট এবং ঠ ও ঠ এবং ড মধ্যস্থ সম্বন্ধের যোগে উৎপন্ন বলিয়া উক্ত হয় ( ৫১০ সংজ্ঞা ) সুতরাং ট এবং ড মধ্যস্থ নিষ্পত্তি সম্বন্ধ ঐ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্রস্থ বাহ্যর পরস্পর সম্বন্ধের যোগ পরিমাণাত্মকায়ি হইবে । অপর যগ যথা গচ্ছ সম্বন্ধে কগ সমানান্তরাল ক্ষেত্র তথা গচ্ছ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্বন্ধে ( ৩১ ) এবং যগ যথা গচ্ছ সম্বন্ধে ট তথা ঠ সম্বন্ধে একারণ ট যথা ঠ সম্বন্ধে কগ ক্ষেত্র তথা গচ্ছ ক্ষেত্র সম্বন্ধে ( ৫১১ ) পুনশ্চ যগ যথা গঙ সম্বন্ধে গচ্ছ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে ( ৩১ ) এবং যগ যথা গঙ সম্বন্ধে ঠ তথা ড সম্বন্ধে সুতরাং ঠ যথা ড সম্বন্ধে গচ্ছ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে ( ৫১১ ) অতএব ইহা সপ্রমাণ হইল যে ট যথা ১ সম্বন্ধে কগ ক্ষেত্র তথা গচ্ছ ক্ষেত্র সম্বন্ধে এবং ঠ যথা ড সম্বন্ধে গচ্ছ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে একারণ সামান্যতঃ ট যথা ড সম্বন্ধে কগ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে ( ৫১২ ) পরন্তু ট এবং ড মধ্যস্থ সম্বন্ধ ঐ দুই ক্ষেত্রের বাহ্য মধ্যস্থ সম্বন্ধের যোগ পরিমাণাত্মকায়ি অতএব কগ গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের পরস্পর সম্বন্ধ উদ্ভাহ মধ্যস্থ সম্বন্ধের যোগ পরিমাণাত্মকায়ি উপপন্ন হইল । সুতরাং সমানকোণি ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

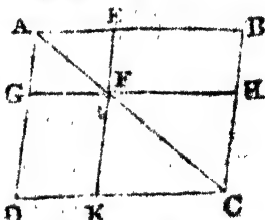
## ২৪ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্রের কর্ণের পরিভাঃ বেং সমানান্তরাল ক্ষেত্র থাকে তাহার পরস্পরের এবং সমুদয় ক্ষেত্রের সদৃশ ।

কথঞ্চ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, কগ তাহার কর্ণ, এবং ওছ জট কর্ণের পরিভাঃ সমানান্তরাল ক্ষেত্র । ওছ এবং জট দুই

the diameter : the parallelograms  $EG$ ,  $HK$  are similar, both to the whole parallelogram  $ABCD$ , and to one another.

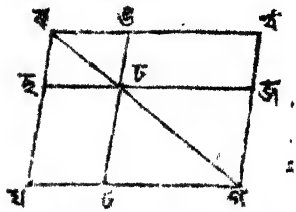
Because  $DC$ ,  $GF$  are parallels, the angle  $ADC$  is equal (29. 1.) to the angle  $AGF$  : for the same reason, because  $BC$ ,  $EF$  are parallels, the angle  $ABC$  is equal to the angle  $AEF$  : also the angles  $BCD$ ,  $EFG$  being each equal to the opposite angle  $DAB$  (34. 1.), are equal to one another, wherefore the parallelograms  $ABCD$ ,  $AEFG$  are equiangular. And because the angle  $ABC$  is equal to the angle  $AEF$ , and the angle  $BAC$  common to the two triangles  $BAC$ ,  $EAF$ , they are equiangular to one another ; therefore (4. 6.) as  $AB$  to  $BC$ , so is  $AE$  to  $EF$  : and because the opposite sides of parallelograms are equal to one another (34. 1.)  $AB$  is (7. 5.) to  $AD$  as  $AE$  to  $AG$  ; and  $DC$  to  $CB$ , as  $GF$  to  $FE$  ; and also  $CD$  to  $DA$ , as  $FG$  to  $GA$  :



therefore the sides of the parallelograms  $ABCD$ ,  $AEFG$  about the equal angles are proportionals ; and they are therefore similar to one another (Def. 1. 6.) : for the same reason, the parallelogram  $ABCD$  is similar to the parallelogram  $PHCK$ . Wherefore each of the parallelograms,  $GE$ ,  $KH$  is similar to  $DB$  : but rectilinear figures which are similar to the same rectilinear figure, are also similar to one another (21. 6.) ; therefore the parallelogram  $GE$  is similar to  $KH$ . Wherefore, parallelograms, &c.  $Q. E. D.$

সমানান্তুরাল ক্ষেত্র পরস্পর এবং সমান্তরাল কথগণ ক্ষেত্রের সদৃশ হইবে ।

যদি চতু পরস্পরের সমানান্তুরাল একারণ কথগ কোণ কছট কোণের সমান (১২৯) তদ্রূপ খগ চত সমানান্তুরাল তন্নিমিত্ত কথগ কোণ কছট কোণের সমান এবং খগঘ চতছ দুই কোণ



প্রত্যেকে সমুখস্থ যকখ কোণের সমান প্রযুক্ত ( ১৩৪ ) পরস্পর সমান অতরাং কথগঘ এবং কঙচছ দুই সমানান্তুরাল ক্ষেত্র পরস্পর সমান কোণি । অপর কথগ কোণ কঙকোণের সমান এবং খকগ কোণ খকগ ওকচ দুই ত্রিভুজের আছে একারণ এই দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি অতরাং কথ যখা খগ সম্বন্ধে কঙ তথা ওচ সম্বন্ধে ( ৩৪ ) এবং সমানান্তুরাল ক্ষেত্রের সমুখস্থ বাহু পরস্পর সমান (১৩৪) অতএব কথ যখা কঘ সম্বন্ধে কঙ তথা কছ সম্বন্ধে (৫৭) এবং ঘগ যথচ গথ সম্বন্ধে ছচ তথা চও সম্বন্ধে এবং গঘ যথা ঘক সম্বন্ধে চছ তথা কক সম্বন্ধে অতরাং কথগঘ কঙচছ দুই সমানান্তুরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্ব বাহু অনুপাতীয়, তন্নিমিত্ত এই ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ ( ৬১ সংজ্ঞা ) তদ্রূপ কথগঘ এবং চজগট দুই সমানান্তুরাল ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ উপপন্ন হইবে অতএব ছও উজ দুই ক্ষেত্র প্রত্যেকে যখা ক্ষেত্রের সদৃশ কিন্তু যেহেতু সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র প্রত্যেকে এক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ তাহারী পরস্পর সদৃশ একারণ ছঙ সমানান্তুরাল ক্ষেত্র উজ সমানান্তুরাল ক্ষেত্রের সদৃশ । অতএব কোন সমানান্তুরাল ক্ষেত্রের ইত্যাদি । ইহাই এখানে উপপাদ্য ।

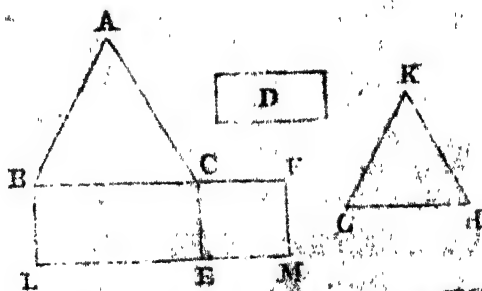


## PROP. XXV. PROB.

*To describe a rectilineal figure which shall be similar to one, and equal to another given rectilineal figure.*

Let  $ABC$  be the given rectilineal figure, to which the figure to be described must be similar; and  $D$  that to which it must be equal: It is required to describe a rectilineal figure similar to  $ABC$ , and equal to  $D$ .

Upon the straight line  $BC$  describe (Cor. 45. 1.) the parallelogram  $BE$  equal to the figure  $ABC$ ; also upon  $CE$  describe the parallelogram  $CM$  equal to  $D$ , and having the angle  $FCE$  equal to the angle  $CBL$ : therefore  $BC$  and  $CF$  are in a straight line (29. 1. 1.), as also  $LE$  and  $EM$ : between  $BC$  and  $CF$  find (13. 6.) a mean proportional  $GH$ , and upon



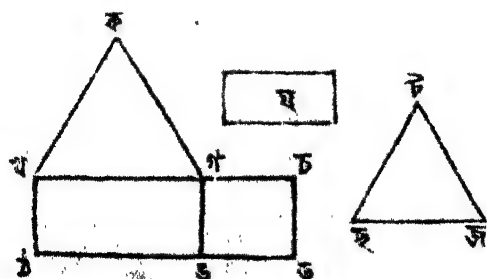
$GH$  describe (18. 6.) the rectilineal figure  $KGH$  similar, and similarly situated, to the figure  $ABC$ . And because  $BC$  is to  $GH$  as  $GH$  to  $CF$ , and if three straight lines be proportionals as the first is to the third, so is (2. Cor. 20. 6.) the figure upon the first to the similar and similarly described figure upon the second; therefore as  $BC$  to  $CF$ , so is the figure  $ABC$  to the figure  $KGH$ ; but as  $BC$  to  $CF$ , so is (1. 6.) the parallelogram  $BE$  to the parallelogram  $EF$ : therefore

## ২৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

এক নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ এবং অন্য এক নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাশিত করিতে হইবেক।

কথগ এবং ঘ নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র। কথগ ক্ষেত্রের সদৃশ অথচ ঘ ক্ষেত্রের সমান অন্য এক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাশিত করিতে হইবেক।

খগ সরল রেখার উপর কথগ ক্ষেত্রের সমান খগু সমানান্ত-  
রাল ক্ষেত্র নিষ্কাশিত কর ( ৭:৪৫ অনুমান ) এবং গঙ সরল  
রেখার উপর ঘ ক্ষেত্রের সমান গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কা-  
সিত কর তাহার চগঙ কোণ যেন গখগ কোণের সমান হয়  
তাহাতে খগ গচ এবং গঙ গড একই সরল রেখায় হইবে  
( ১২৯—১১৪ ) খগ এবং গচ সরল রেখার চুজ সম্বন্ধ  
অনুপাতীয় নির্দেশ করিয়া ( ৩:১৩ ) তাহার উপর কথগ  
ক্ষেত্রের সদৃশ এবং সদৃশবস্থ টছজ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র  
নিষ্কাশিত কর ( ৩:১৮ ) অপর খগ যথা ছজ সম্বন্ধে ছজ



তথা গচ সম্বন্ধে কল্পিত হইয়াছে এবং তিন সরল ত্রৈখিক  
ক্ষেত্র অনুপাতীয় হইলে প্রথম যথা তৃতীয় সম্বন্ধে প্রথ-  
মোপরিস্থ ক্ষেত্র তথা দ্বিতীয়োপরিস্থ তৎ সদৃশ ক্ষেত্র সম্বন্ধে  
( ৩:২০ দ্বিতীয় অনুমান ) একারণ খগ যথা গচ সম্বন্ধে কথগ  
ক্ষেত্র তথা টছজ সম্বন্ধে। পরন্তু খগ যথা গচ সম্বন্ধে খগ

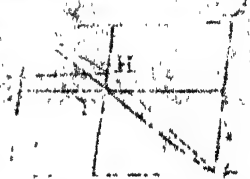
as the figure  $ABC$  is to the figure  $KGH$ , so is the parallelogram  $BE$  to the parallelogram  $EF$  (11. 5.): but the rectilineal figure  $ABC$  is equal to the parallelogram  $BE$ ; therefore the rectilineal figure  $KGH$  is equal (14. 5.) to the parallelogram  $EF$ : but  $EF$  is equal to the figure  $D$ ; wherefore also  $KGH$  is equal to  $D$ ; and it is similar to  $ABC$ . Therefore, the rectilineal figure  $KGH$  has been described similar to the figure  $ABC$ , and equal to  $D$ . Which was to be done.

### PROP. XXVI. THEOR.

*If two similar parallelograms have a common angle, and be similarly situated, they are about the same diameter.*

Let the parallelograms  $ABCD$ ,  $AEFG$  be similar and similarly situated, and have the angle  $DAB$  common:  $ABCD$  and  $AEFG$  are about the same diameter.

For, if not, let, if possible, the parallelogram  $BD$  have its diameter  $AHC$  in a different straight line from  $AF$ , the diameter of the parallelogram  $EG$ , and let  $GF$  meet  $AHC$  in  $H$ ; and through  $H$  draw  $HK$



parallel to  $AD$  or  $BC$ ; therefore the parallelograms  $ABCD$ ,  $AKHG$  being about the same diameter, are similar to one another (24. 6.): wherefore, as  $DA$  to

সমানান্তরাল ক্ষেত্র তথা গুচ সমানান্তরাল ক্ষেত্র সম্বন্ধে (৬।১) অতএব কথং ক্ষেত্র যথা টহজ ক্ষেত্র সম্বন্ধে খগু সমানান্তরাল ক্ষেত্র তথা গুচ সম্বন্ধে (১।১১) অধিকন্তু কথং সরল রেখিক ক্ষেত্র খগু সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান অতএব টহজ ক্ষেত্র গুচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান (৫।১৪) এবং গুচ ঘ সমান হওয়াতে টহজ ক্ষেত্রও ঘ সমান উপপন্ন হইল এবং পূর্বে তাহা কথং ক্ষেত্রের সদৃশ মপ্রমাণ হইয়াছে। অতএব টহজ সরল রেখিক ক্ষেত্র কথং ক্ষেত্রের সদৃশ এবং ঘ ক্ষেত্রের সমান রূপে নিরূপিত হইল। ইহাই এতদ্ব্যন্তরে সম্পাদ্য।

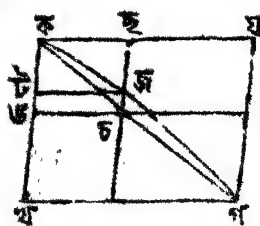
### ২৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই সদৃশ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের যদি এক সামান্য কোণ থাকে এবং উভয়ে যদি সদৃশবিন্দু হয় তবে তাহারা এক কর্ণের পরিতত্ত্ব হইবে।

কথংঘ এবং কঙচহ দুই সদৃশ এবং সদৃশবিন্দু সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সকল এক সামান্য কোণ কল্পনা কর। কথংঘ এবং কঙচহ উভয়ে এক কর্ণের পরিতত্ত্ব হইবে।

যদি সাং তাহা না হয় তবে গুচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের কচ

কর্ণ হইতে স্বতন্ত্র সরল রেখায় খঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের কজগ কর্ণ কল্পনা কর এবং জ বিন্দুতে কজগ ও গুচ সরল রেখার সম্পাত হউক। জ বিন্দু দিয়া টজ সরল রেখা কথ অথবা খগ রেখার সমানান্তরালরূপে নিরূপিত কর তাহাতে কথংঘ এবং কটজহ




সমানান্তরাল ক্ষেত্র এক কর্ণের পরিতত্ত্ব প্রযুক্ত পরস্পর সদৃশ হইবে (৬।২৫) অতএব যক যথা কথ সম্বন্ধে হক তথা কট সম্বন্ধে কহা যাইতে পারে (৬।১ সংজ্ঞা) পরন্তু

AB, so is (Def. 1. 6.) GA to AK : but because ABCD and AEFG are similar parallelograms, as DA is to AB, so is GA to AE ; therefore (II. 5.) as GA to AE, so is GA to AK ; wherefore GA has the same ratio to each of the straight lines AE, AK ; and consequently AK is equal (9. 5.) to AE, the less to the greater, which is impossible : therefore ABCD and AKHG are not about the same diameter ; wherefore ABCD and AEFG must be about the same diameter. Therefore, if two similar, &c. Q. E. D.

### PROP. XXVII. THEOR.

*Of all the rectangles contained by the segments of a given straight line, the greatest is the square which is described on half the line.*

Let AB be a given straight line, which is bisected in C, and let D be any point in it ;  the square on AC is greater than the rectangle AD.DB.

For, since the straight line AB is divided into two equal parts in C, and into two unequal parts in D, the rectangle contained by AD and DB together with the square of CD, is equal to the square of AC (5. 2.). The square of AC is therefore greater than the rectangle AD.DB. Therefore, &c. Q. E. D.

পূর্ব করনামুসারে কথগণ এবং কণ্ডচছ পরস্পর সদৃশ একারণ  
যক যথা কথ সম্বন্ধে ছক তথা কণ্ড সম্বন্ধে নিশ্চিত হইতেছে  
( ৫।১১ ) সুতরাং ছক যথা কণ্ড সম্বন্ধে ছক তথা কণ্ড সম্বন্ধে  
অর্থাৎ কণ্ড কণ্ড দুই রেখার সম্বন্ধে ছক রেখার নিষ্পত্তি পরি-  
মাণ সমান সুতরাং কণ্ড এবং কণ্ড পরস্পর সমান হয়  
( ৫।১২ ) কিন্তু তাহা অসাধ্য কেননা লঘুতর বৃহত্তরের সমান  
হয় না অতএব কথগণ কণ্ডজ্ঞ উভয়ে এক কর্ণের পরিত্যক্ত  
হইতে পারে না সুতরাং কথগণ কণ্ডে অবশ্য এক কর্ণের  
পরিত্যক্ত হইবে। অতএব দুই সদৃশ ইত্যাদি। ইহাই এখানে  
উপাদ্য।

## ২৭ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার বিন্দু খণ্ডে বের আয়ত  
সম্যাক হয় ঐ সরল রেখার অঙ্কের উপরিস্থ সম চতুর্ভুজ  
হই সর্বাপেক্ষা বৃহত্তম হইবে।

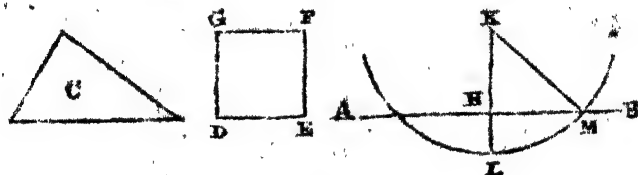
কথ এক নির্দিষ্ট সরল রেখা গ বিন্দুতে বিখণ্ডিত হইয়াছে  
এবং খ তত্বে অপর বিন্দু। কথ রেখার—  
সমচতুর্ভুজ কথ যথ আয়ত অপেক্ষা ক গ ঘ খ  
বৃহৎ হইবে।

কেননা কথ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে এবং  
খ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হওয়াতে কথ এবং  
খ খণ্ডের আয়ত এবং গ ঘ খণ্ডের সমচতুর্ভুজ একত্র  
যোগে কথ রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে ( ২।৫ ) সুতরাং  
কথ সমচতুর্ভুজ কথ যথ আয়ত অপেক্ষা বৃহৎ হইবে। অতএব  
কোন নির্দিষ্ট ইত্যাদি। ইহাই এখানে উপপাদ্য।

## PROP. XXVIII. PROB.

*To divide a given straight line, so that the rectangle contained by its segments, may be equal to a given rectilincal figure\*, but that figure must not be greater than the square of half the given line.*

Let  $AB$  be the given straight line, and  $C$  the

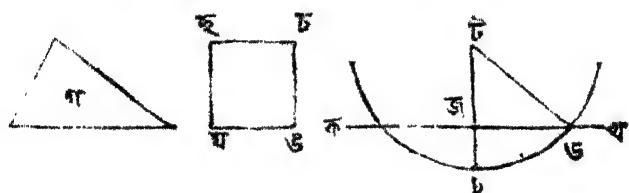


\* Playfair, who substituted this proposition in his edition instead of the original Prop. XXVIII of Euclid, which he rightly describes as unnecessarily complex for beginners, has committed an inaccuracy, in not limiting the kind of figure, to which the rectangle contained by the segments of the divided line is to be made equal. Euclid observes as a strict rule throughout his work never to direct any thing to be done, which he has not either shown how to do in an earlier problem or assumed as possible to be done by one of his postulates. By not limiting the given space to rectilincal space, Playfair tacitly assumes that a square can always be found equal to any given space, which is not true.

## ২৮ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন করিয়া ভাগ করিতে হইবে যে দুই খণ্ডের আয়ত এক নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হয় অথচ ঐ ক্ষেত্র অঙ্ক রেখার সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা অধিক হইতে না পারে।

কথ নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং গ নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র গ ক্ষেত্রের সমান যতটুকু এক সমচতুর্ভুজ নিষ্কাশন কর (৩২৫) অপর কথ সরল রেখাকে অবিদ্যুতে বিখণ্ড কর কজ রেখার সমচতুর্ভুজ যদি যতটুকু সমচতুর্ভুজের সমান হয় তবে



অভীষ্ট সিদ্ধির অপেক্ষা নাই যদি সমান না হয় তবে কখনোমাত্র কজ রেখার সমচতুর্ভুজ যতটুকু হইতে অবশ্য

পেক্ষার ইউক্লিডের মূল গ্রন্থোক্ত ২৮ প্রতিজ্ঞার পরিবর্তে এই প্রতিজ্ঞা রচনা করিয়াছেন তিনি কহেন ইউক্লিড প্রদত্ত প্রতিজ্ঞানুযায়ী পাঠকের পক্ষে অত্যন্ত কঠিন; তাহা যথার্থ বটে কিন্তু বিভক্ত রেখার খণ্ডের আয়ত কীদংশ ক্ষেত্রের সমান হইবে তাহা স্থির না করাতে তাহার রচনায় দোষস্পর্শ হয়। ইউক্লিড পূর্ববর্তী কোন প্রতিজ্ঞায় যে বিষয় সম্পাদন করিবার দ্বারা প্রকাশ করেন নাই অথবা সহজে সম্পাদ্য বলিয়া স্বীকার করেন নাই কখন তাহার ন্যাস উল্লেখ করেন না। পেক্ষার উক্ত ক্ষেত্রে সরল ত্রৈখিক বলিয়া বিশেষণ না করাতে আপাততঃ অস্বীকার করিতেছেন যে সর্ব প্রকার ক্ষেত্রের তুল্য সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করা যায় কিন্তু তাহা বাস্তবিক সত্য নহে।



given rectilineal figure. Describe a square DEFG equal to C (25. 6.)

Bisect AB in H, and if the square upon AH is equal to DEFG, the thing required is done. But if they are not equal, the square upon AH is greater than DEFG, by the condition; and therefore AH is greater than DE, the side of the square DEFG. Draw HK at right angles to AB and equal to DE; and produce KH to L so that KL be equal to AH or HB; and from the centre K at the distance KL, describe a circle meeting AB in M. Join KM; and because AB is divided equally in H, and unequally in M,  $AM.MB + HM^2 = AH^2$  (5. 2.)  $= KM^2$ . But  $KH^2 + HM^2 = KM^2$  (47. 1.); therefore  $AM.MB + HM^2 = KH^2 + HM^2$ , and taking away  $HM^2$ ,  $AM.MB = KH^2$ . Now  $KH = DE$ , and therefore  $KH^2 = DE^2$ . But the square of DE is equal to the rectilineal figure C; hence  $AM.MB = C$ ; wherefore the given straight line AB is divided in M so that the rectangle contained by the segments AM, MB is equal to the given rectilineal figure C.

*Which was to be done.*

### PROP. XXIX. PROB.

*To produce a given straight line, so that the rectangle contained by the segments between the extremities of the given line, and the point to which it is produced, may be equal to a given rectilineal figure.\**

\* Here too Playfair says simply "a given space" without limiting it. See preceding note.

অধিক হইবে সুতরাং ঘণ্টা চতুর্ভুজের ঘণ্টা বাহু হইতে কক্ষ বহুতর হইবে ।

কথ রেখার লম্বভাবে জট নির্দ্ধানিত করিয়া তাহা ঘণ্টা সমান কর এবং টজ রেখাকে ঠ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর যেন টট কক্ষ অথবা জখ সমান হয়। অনন্তর ট কেন্দ্র করিয়া টট পর্য্যন্ত বৃত্ত অঙ্কিত করড বিন্দুতে সেই বৃত্তের কথ রেখোপরি সম্প্রতি হটক পরে টড সংযুক্ত কর। কথ রেখা জ চিত্তে সমান ভাবে এবং ড চিত্তে অসমান ভাবে বিভক্ত হইয়াছে একারণ কড.  $উখ + জড^২ = কজ^২ (৫২) = টড^২$ । অপর টজ<sup>২</sup> + জড<sup>২</sup> = টড<sup>২</sup> (১৪৭) সুতরাং কড.উখ + জড<sup>২</sup> = টজ<sup>২</sup> + জড<sup>২</sup> এবং জড<sup>২</sup> বিয়োগ করিলে কড.উখ = টজ<sup>২</sup>। অধিকন্তু টজ = ঘণ্টা সুতরাং টজ<sup>২</sup> = ঘণ্টা<sup>২</sup>। কিন্তু ঘণ্টা রেখার সম চতুর্ভুজ গ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের তুল্য তন্নির্মিত কড.উখ = গ অতএব নির্দিষ্ট কথ সরল রেখা ড বিন্দুতে এমত একারে বিভক্ত হইয়াছে যে কড এবং উখ দুই খণ্ডের আয়তগ নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

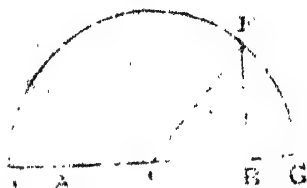
## ২৯ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমত করিয়া বৃদ্ধি করিতে হইবে যে ঐ রেখার দুই প্রান্ত এবং বৃদ্ধির সীমা মধ্যস্থ দুই খণ্ডের আয়ত নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের তুল্য হয়।

কথ নির্দিষ্ট সরল রেখা। বর্দ্ধিতব্য কথ রেখার খণ্ডের আয়ত যে সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইবে তত্ব ল্য এক সম চতুর্ভুজ কল্পনা কর (৩২৫)। ঘণ্টা সরল রেখা ঐ চতুর্ভুজের বাহু হটক।

\* প্রক্ষেপার এস্থলেও সাধারণ রূপে কহেন “এক নির্দিষ্ট ক্ষেত্র” পূর্ব টীকায় দৃষ্টি কর।

Let  $AB$  be the given straight line; find a square equal to the rectilinear figure to which the rectangle under the segments of  $AB$  produced, must be equal (25. 6.); and let the straight line  $DE$  be the side of that square.



Bisect  $AB$  in  $C$ , and

draw  $BF$  at right angles to  $AB$ , and take  $BF$  equal to  $DE$ . Join  $CF$  and from the centre  $C$ , at the distance  $CF$ , describe a circle meeting  $AB$  produced in  $G$ . And because  $AB$  is bisected in  $C$ , and produced to  $G$ ,  $AG.GB + CB^2 = CG^2$  (6. 2.)  $= CF^2$ . But  $CF^2 = CB^2 + BF^2$  (47. 1.), therefore  $AG.GB + CB^2 = BF^2 + CB^2$  and  $AG.GB = BF^2$ . Now  $BF = DE$  hence  $BF^2 = DE^2$ . But the square upon the straight line  $DE$  is equal to the rectilinear figure to which the rectangle contained by the segments of  $AB$  produced is to be equal; wherefore the straight line  $AB$  is produced to  $G$  so that the rectangle  $AG.GB$  is equal to the given rectilinear figure. Which was to be done.

Scholium. It is to be noticed that in this proposition, the magnitude of the given rectilinear figure is not limited as in the last problem.

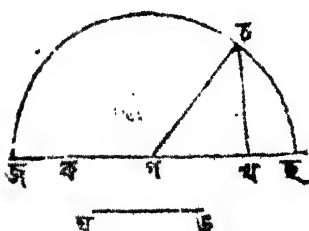
### PROP. XXX. PROB.

*To cut a given straight line in extreme and mean ratio.*

Let  $AB$  be the given straight line; it is required to cut it in extreme and mean ratio.

Upon  $AB$  describe (46. 1.) the square  $BC$ , and produce  $CA$  to  $D$ , so that the rectangle  $CD.DA$  may

কথ সরল রেখাকে গ বিন্দু  
তে দ্বিখণ্ডিত করিয়া খচ তাহার  
লম্ব নির্দ্ধাসিত কর যেন খচ  
ঘণ্ড সমান হয় পরে গচ সংযুক্ত  
করিয়া গ কেন্দ্র হইতে গচ পর্য্যন্ত  
বৃত্ত অঙ্কিত কর কথ সরল



রেখা বদ্ধিত হইয়া ছ বিন্দুতে ঐ বৃত্ত সংগ্ৰহ উৎক । অপর  
কথ গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া ছ পর্য্যন্ত বদ্ধিত হইয়াছে  
একারণ কছ. ছখ + গখ<sup>২</sup> = গছ<sup>২</sup> ( ২১৬ ) = গচ<sup>২</sup> । পরন্তু  
গচ<sup>২</sup> = গখ<sup>২</sup> + খচ<sup>২</sup> ( ১৪৭ ) সুতরাং কছ. ছখ + গখ<sup>২</sup> =  
গখ<sup>২</sup> + খচ<sup>২</sup> এবং কছ. ছখ = খচ<sup>২</sup> । অধিকন্তু খচ = ঘণ্ড  
সুতরাং খচ<sup>২</sup> = ঘণ্ড<sup>২</sup> । অপর বদ্ধিতব্য কথ রেখার খণ্ডের  
সায়ত যে সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইবে ঘণ্ড রেখার সম-  
চতুর্ভুজ তত্ত্ব ল্য অতএব কথ সরল রেখা এমত প্রকারে ছ  
পর্য্যন্ত বদ্ধিত হইয়াছে যে বদ্ধিত রেখার কছ এবং ছখ খণ্ডের  
সায়ত নির্দ্ধিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইল । ইহাই  
এখানে সম্পাদ্য ।

টিকা : পাঠকবগ এখানে বুঝিবেন যে পূর্ববর্ত্তি প্রতিজ্ঞাতে  
যেনত নির্দ্ধিষ্ট সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের পরিমাণ নির্দ্ধারিত হই-  
তছিল এ প্রতিজ্ঞায় সেরূপ হয় নাই ।

### ৩০ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

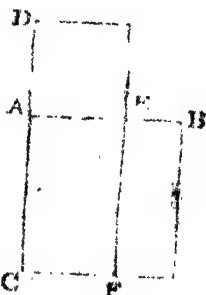
এক নির্দ্ধিষ্ট সরল রেখাকে অন্ত্য এবং মধ্য অমুপাতীয়  
করিয়া ছেদ করিতে হইবে ।

কথ নির্দ্ধিষ্ট সরল রেখা, তাহাকে অন্ত্য এবং মধ্য অমু-  
পাতীয় করিয়া ছেদ করিতে হইবে ।

কথ রেখার উপর খগ সম চতুর্ভুজ নির্দ্ধাসিত কর ( ১৪৬ )  
এবং গক ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর যেন গক.ঘক সায়ত খগ সম

be equal to the square CB (29. 6.). Take AE equal to AD, and complete the rectangle DF under DC and AE, or under DC and DA. Then, because the rectangle

CD.DA is equal to the square CB, the rectangle DF is equal to CB. Take away the common part CE from each, and the remainder FB is equal to the remainder DE. But FB is the rectangle contained by FE and EB, that is, by AB and BE; and DE is the square upon AE; therefore AE is a mean proportional between AB and BE (17. 6.), or AB is to AE as AE to EB. But AB is greater than AE;



wherefore AE is greater than EB (14. 5.): Therefore the straight line AB is cut in extreme and mean ratio in E (Def. 3. 6.). Which was to be done.

Otherwise :

Let AB be the given straight line; it is required to cut it in extreme and mean ratio.

Divide AB in the point C, so that the rectangle contained by AB.BC may be equal to the square of AC (11. 2.); Then, A C B because the rectangle AB.BC is equal to the square of AC, as BA to AC, so is AC to CB (17. 6.); Therefore AB is cut in extreme and mean ratio in C (11. 2.). Which was to be done.

চতুর্ভুজ তুল্য হয় ( ৬২৯ ) এবং কণ্ডযক সমান ছেদ করিয়া

খগ এবং কণ্ড অথবা খগ এবং খক রেখার আয়ত ঘট পূর্ণ কর।

খগযক আয়ত খগ সম্যচতুর্ভুজের

সমান হওয়াতে ঘট আয়ত ক্ষেত্র খগ

সমান হইতেছে এই দুই ক্ষেত্রের কচ

সমান্যাত্মক বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট ঘঙ

কণ্ড খচ সমান হইবে। পরন্তু খচ ক্ষেত্র

ঙে এবং ঙবা অর্থাৎ কখ এবং খঙ

রেখার আয়ত এবং ঘঙ কণ্ড রেখার সম

চতুর্ভুজ অতএব কণ্ড রেখা কখ গ

খঙ রেখার মধ্য অন্তঃপাতীয় ( ৬১৭ ) অর্থাৎ কখ যথা

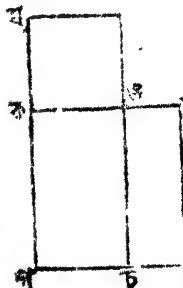
ঘঙ সম্বন্ধে কণ্ড তথা খঙ সম্বন্ধে সঙ্গ্রহাণ হইল। অপর কখ

খঙ অপেক্ষা বৃহৎ সুতরাং কণ্ড খঙ অপেক্ষা বৃহৎ হইবে

( ৬১৭ ) অতএব কখ সরল রেখা ঙ বিন্দুতে অস্ত্য এবং মধ্য

অন্তঃপাতীয় রূপে হিম হইল ( ৬১৩ সংজ্ঞা )। ইহাই এতলে

সম্পাদ্য।



### প্রকারান্তর ।

কখ ি দ্বিত সরল রেখাকে অস্ত্য এবং মধ্য অন্তঃপাতীয়  
রূপে হিম করিতে হইবে।

কখ রেখাকে গ বিন্দুতে এমত করিয়া হিম কর যে কখ-  
খগ আয়ত কগ সরল রেখার সম চতুর্ভুজ

সমান হয় ( ২১১ ) অপর কখ খগ আয়ত ক গ খ

কগ রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য একারণ এক যথা কগ সম্বন্ধে

কগ তথা গখ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে ( ৬১৭ ) অতএব কখ

সরল রেখা অস্ত্য এবং মধ্য অন্তঃপাতীয় রূপে হিম হইল।

ইহাই এতলে সম্পাদ্য।

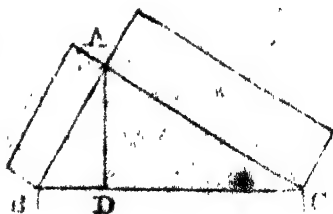
## PROP. XXXI. THEOR.

*In right angled triangles, the rectilineal figure described upon the side opposite to the right angle, is equal to the similar, and similarly described figures upon the sides containing the right angle.*

Let  $ABC$  be a right angled triangle, having the right angle  $BAC$ : The rectilineal figure described upon  $BC$  is equal to the similar, and similarly described figures upon  $BA$ ,  $AC$ .

Draw the perpendicular  $AD$ ; therefore, because in right angled triangle  $ABC$ ,  $AD$  is drawn from right angle at  $A$  perpendicular to the base  $BC$ , the triangles  $ABD$ ,  $ADC$  are similar to the whole triangle  $ABC$ , and to one another (8. 6.); and because the triangle  $ABC$ , is similar to  $ADB$ , as  $CB$  to  $BA$ , so is  $EA$  to  $BD$  (4. 6.); and because these three straight lines are proportionals, as the first to the third, so is the figure upon the first to the similar, and similarly described figure upon the second (2. Cor.): Therefore, as  $CB$  to  $BD$ , so is the figure upon  $CB$  to the similar

and similarly described figure upon  $BA$ : and inversely (B. 5.), as  $DB$  to  $BC$ , so is the figure upon  $BA$  to that upon  $BC$ ; for the same reason, as  $DC$  to  $CB$ , so is the figure upon  $CA$  to that upon  $CB$ . Wherefore, as  $BD$  and  $DC$



together to  $BC$ , so are the figures, upon  $BA$  and on  $AC$

### ৩১ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণের সম্মুখস্থ বাহুর উপরি নিষ্কাশিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র সমকোণের পার্শ্বস্থ দুইবাহুর উপরিস্থ তৎসদৃশ এবং তাদৃশ রূপে নিষ্কাশিত দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হয়।

কখন সমকোণি ত্রিভুজ তাহার মধ্যে খকগ সমকোণ। খগ জো উপরি নিষ্কাশিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র কখ এবং কগ বাহুর উপরিস্থ তৎসদৃশ এবং তাদৃশরূপে নিষ্কাশিত দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্র সমান হইবে।

এক সম্বপাত কর। অপর কখগ সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণ ক হইতে খগ ভূমির উপর সম্বপাত হইয়াছে একারণ কখঘ এবং দুই ত্রিভুজ সমুদয় কখগ ত্রিভুজের এবং পরস্পরের সমান হইল ( ৩৮ ) এবং কখগ ত্রিভুজ কখঘ ত্রিভুজের

সদৃশ হওয়াতে খগ যথা

কক সম্বন্ধে খক তথা খঘ

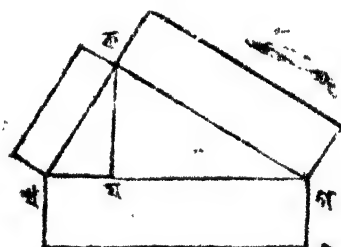
সম্বন্ধে ( ৩৮ ) এবং

এই তিন সরল রেখা

অসমানান্তর হওয়াতে

প্রথম যথা তৃতীয় সম্ব-

ন্ধে প্রথমোক্ত উপরিস্থ ক্ষেত্র



খগ দ্বিতীয়োপরিস্থ তৎসদৃশ এবং তাদৃশ রূপে নিষ্কাশিত

ক্ষেত্রের সম্বন্ধে ( ৩২০ দ্বিতীয় অনুমান ) অতএব গখ যথা

খঘ সম্বন্ধে গখ উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা খক উপরিস্থ তৎসদৃশ

ক্ষেত্রের সম্বন্ধে এবং বিশেষ নিষ্পত্তিতে ( ৬৫ ) ঘখ যথা

খগ সম্বন্ধে খক উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা খগ উপরিস্থ ক্ষেত্রের

সম্বন্ধে। তদ্রূপ ঘগ যথা খগ সম্বন্ধে গক উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা

খঘ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে। অতএব

( ৩১৪ ) খঘ এবং ঘগ দুই ক্ষেত্রের একত্র যোগ যথা



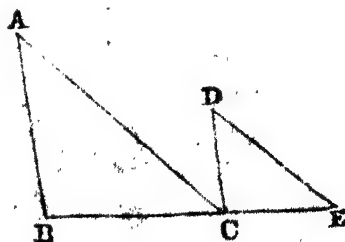
together, to the figure upon  $BC$  (24. 5); therefore, the figures on  $BA$ , and on  $AC$ , are together equal to that on  $BC$ ; and they are similar figures. Wherefore, in right angled triangles, &c.  $Q. E. D.$

### PROP. XXXII. THEOR

*If two triangles which have two sides of the one proportional to two sides of the other, be joined at one angle, so as to have their homologous sides parallel to one another; the remaining side shall be in a straight line.*

Let  $ABC$ ,  $DCE$  be two triangles which have two sides  $BA$ ,  $AC$  proportional to the two  $CD$ ,  $DE$ , viz.  $BA$  to  $AC$ , as  $CD$  to  $DE$ , and let  $AB$  be parallel to  $DC$ , and  $AC$  to  $DE$ ;  $BC$  and  $CE$  are in a straight line.

Because  $AB$  is parallel to  $DC$ , and the straight line  $AC$  meets them, the alternate angles  $BAC$ ,  $ACD$  are equal (26. 1); for the same reason, the angle  $CDE$  is equal to the angle  $ACD$ ; wherefore also  $BAC$  is equal to  $CDE$ : And because the triangles  $ABC$ ,  $DCE$  have one angle at  $A$  equal to one at  $D$ , and the sides about these angles proportionals, viz.  $BA$  to  $AC$ , as  $CD$  to  $DE$ , the triangle  $ABC$  is equiangular (6. 6.) to  $DCE$ : Therefore the angle  $ABC$  is equal to the angle  $DCE$ : And the angle  $BAC$  was proved to be equal



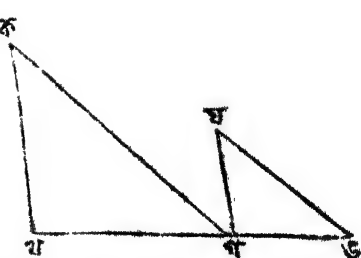
খগ সমান্তর খক এবং কগ উপরিস্থ দুই ক্ষেত্রের একত্র যোগ  
তথা খগ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে উপপন্ন হইল সুতরাং  
খক এবং কগ উপরিস্থ দুই ক্ষেত্র খগ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সমান  
নিশ্চিত হইল আর তাহারা পরস্পর সদৃশও বটে। অতএব  
ত্রিভুজে ইত্যাদি। ইহাই এক্ষণে উপপাদ্য।

## ৩২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের যদি দুই বাহু অসুপাতীয় হয় এবং  
তাহারা এক কোণে পরস্পর সমান্তর প্রযুক্ত যদি সর্বগণ  
যাতি পরস্পরের সমানান্তরান হয় তবে তাহাদের অবশিষ্ট  
বাহু এক সরল রেখায় থাকিবে।

কখন এবং যগও দুই ত্রিভুজের খক কগ বাহু গঘ ঘঙ  
বাহু অসুপাতীয় কর্তৃক অর্থ্যাৎ খক যথা কগ সম্বন্ধে  
গঘ তথা যগ সম্বন্ধে স্তান করা এবং কখ যগ ও কগ যগ পরস্পর  
এর সমানান্তরান কর্তৃক  
প্রথম উপপন্ন হইবে।

কখ যগ পরস্পর সমা-  
নান্তরান এবং তাহার-  
দেব উপর কগ রেখার  
সম্পাত হইয়াছে একারণ  
খকগ কোন অপর পার্শ্বস্থ  
কগঘ সমান ( ১২৯ )  
ঐ কারণ গঘঙ কোন



কগঘ কোণের সমান সুতরাং খকগ এবং গঘঙ পরস্পর  
সমান। অপিচ কখগ যগও দুই ত্রিভুজের ক এবং ঘ কোণ  
সমান এবং ঐ সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অসুপাতীয়  
হওয়াতে অর্থ্যাৎ খক যথা কগ সম্বন্ধে গঘ তথা যগ সম্বন্ধে  
কল্পিত হওয়াতে কখগ এবং গঘঙ ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি

to  $\angle ACD$  : Therefore the whole angle  $ACE$  is equal to the two angles  $ABC$ ,  $BAC$  ; add the common angle  $ACB$ , then the angles  $ACE$ ,  $ACB$  are equal to the angles  $ABC$ ,  $BAC$ ,  $ACB$  : But  $ABC$ ,  $BAC$ ,  $ACB$  are equal to two right angles (32. 1.) ; therefore also the angles  $ACE$ ,  $ACB$  are equal to two right angles : And, since at the point  $C$ , in the straight line  $AC$ , the two straight lines  $BC$ ,  $CE$ , which are on the opposite sides of it, make the adjacent angles  $ACE$ ,  $ACB$  equal to two right angles ; therefore (14. 1.)  $BC$  and  $CE$  are in a straight line. Wherefore, if two triangles,  $\triangle Q. E. D.$

### PROP. XXXIII. THEOR.

*In equal circles, angles, whether at the centres or circumferences, have the same ratio which the arches, on which they stand, have to one another : So also have the sectors.*

Let  $ABC$ ,  $DEF$  be equal circles ; and at their centres the angles  $BGC$ ,  $EHF$ , and the angles  $BAC$ ,  $EDF$ , at their circumferences ; as the arch  $BC$  to the arch  $EF$ , so is the angle  $BGC$  to the angle  $EHF$ , and the angle  $BAC$  to the  $EDF$  : and also the sector  $BGC$  to the sector  $EHF$ .

Take any number of arches  $CK$ ,  $KL$ , each equal to  $BC$ , and any number whatever  $FM$ ,  $MN$ , each equal to  $EF$  ; and join  $GK$ ,  $GL$ ,  $HM$ ,  $HN$ . Because the arches  $BC$ ,  $CK$ ,  $KL$  are all equal, the angles  $BGC$ ,  $CGK$ ,  $KGL$  are also all equal (27. 3.) : Therefore,

উপপন্ন হইতেছে ( ৬১৬ ) একারণ কখগ কোণ ঘগঙ কোণের সমান হইল এবং পূর্বের সপ্রমাণ হইয়াছে যে খকগ কোণ গঘঙ কোণ সমান অতএব সমুদয় কগঙ কোণ খকগ এবং কখগ দুই কোণের তুল্য তাহাতে খগক কোণ যোগ করিলে কগঙ এবং কগখ দুই কোণ খকগ কখগ এবং কগখ তিন কোণের সমান হয় পরন্তু খকগ কখগ এবং কগখ তিন কোণ দুই সমকোণ তুল্য ( ১৩২ ) অতএব কগঙ এবং কগখ দুই সমকোণ তুল্য এবং কগ রেখাস্থ গ বিন্দুতে খগ গঙ দুই সরল রেখা তিন্ম পান্থ হইতে আসিয়া কগঙ এবং কগখ দুই সংলগ্ন কোণকে একত্র দুই সমকোণ তুল্য করিতেছে একারণ খগ এবং গঙ এক সরল রেখাস্থ সপ্রমাণ হইল ( ১১৪ ) । অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য ।

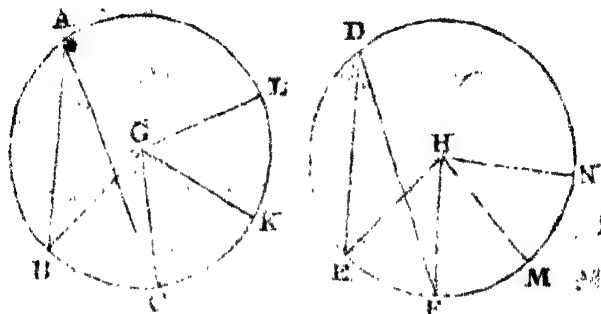
### ৩৩ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

সমান২ বৃত্তেতে কেন্দ্রস্থ অথবা পরিধিস্থ কোণ যে২ চাপের উপর থাকে পরস্পরের সম্বন্ধে তদনুযায়ি নিম্পত্তি পরিমাণ ধারণ করে । বৃত্ত ক্ষেদ্রকের বিষয়েও এইরূপ হয় ।

কখগ ঘগঙ দুই সমান২ বৃত্ত, খছগ এবং গুজচ তাহারদের কেন্দ্রস্থ কোণ এবং খকগ ও গঘচ পরিধিস্থ কোণ । খগ চাপ যথা গুচ চাপ সম্বন্ধে খছগ কোণ তথা গুজচ সম্বন্ধে এবং খকগ গুঘচ সম্বন্ধে । আর খছগ বৃত্তক্ষেদ্রক ও তথা গুজচ বৃত্তক্ষেদ্রক সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে ।

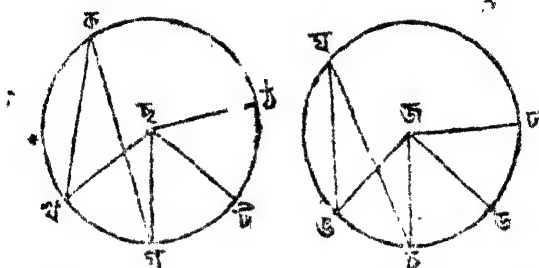
খগ চাপের সমান২ কএক চাপ যথা গট টঠ এবং গুচ চাপের সমান২ কএক চাপ যথা চড ডচ কল্পনা করিয়া ছট ছঠ জড জচ সংযুক্ত কর । খগ গট টঠ চাপ পরস্পর সমান একারণ খছগ গছট টছঠ কোণও পরস্পর সমান হইবে ( ৩২৭ ) অতএব খঠ চাপ যে পরিমাণে খগ চাপের অপবর্ত্য খছঠ কোণও সেই পরিমাণে খছগ কোণের অপবর্ত্য । তদ্রূপ গুচ চাপ যে পরিমাণে গুচ চাপের অপবর্ত্য

what multiple soever the arch BL is of the arch BC,



the same multiple is the angle BGL of the angle BGC; for the same reason, whatever multiple the arch EN is of the arch EF, the same multiple is the angle EHN of the angle EHF. But if the arch BL be equal to the arch EN, the angle BGL is also equal (27. 3.) to the angle EHN; or if the arch BL be greater than EN, likewise the angle BGL is greater than EHN; and if less, less: There being then four magnitudes, the two arches BC, EF, and the two angles BGC, EHF; and of the arch BC, and of the angle BGC have been taken any equimultiples whatever, viz. the arch BL, and the angle BGL: and of the arch EF, and of the angle EHF, any equimultiples whatever, viz. the arch EN, and the angle EHN: And it has been proved, that if the arch BL be greater than EN, the angle BGL is greater than EHN; and if equal, equal; and if less, less: As, therefore, the arch BC to the arch EF, so (Def. 5. 5.) is the angle BGC to the angle EHF: But as the angle BGC is to the angle EHF, so is (15. 5.) the angle BAC to the angle EDF, for each is double of each (20. 3.): Therefore, as the circumference BC is to EF, so is the angle BGC to the angle EHF, and the angle BAC to the angle EDF.

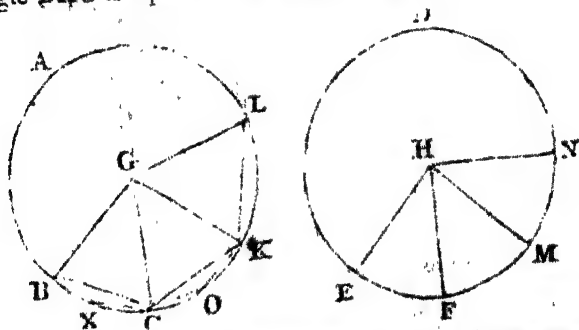
ওজ্জ্বল কোণও সেই পরিমাণে ওজ্জ্বল কোণের অপবর্ত্ত্য। পরন্তু  
খট চাপ ওট চাপের সমান হইলে খছট কোণও ওজ্জ্বল  
কোণের সমান হইবে (৩২৭) অথবা খট চাপ ওট চাপের অধিক



হলে খছট কোণও ওজ্জ্বল কোণের অধিক হইবে এবং উভয়  
চাপ স্থান হইলে কোণও তদুপ স্থান হইবে। অতএব এখানে  
চারি রাশি নির্দিষ্ট হইতেছে অর্থাৎ খগ ওট দুই চাপ এবং  
খছ। ও ওজ্জ্বল দুই কোণ এবং খগ চাপ ও খছগ কোণের দুই  
সম অপবর্ত্ত্য খট চাপ এবং খছট কোণ তথা ওট চাপ এবং  
ওট কোণের দুই সম অপবর্ত্ত্য ওট চাপ এবং ওট কোণ নি-  
শ্চয় হইয়াছে এবং ইহাও সপ্রমাণ হইয়াছে যে খট চাপ ওট  
চাপের সমান অথবা স্থানাদিক হইলে খছট কোণও ওজ্জ্বল  
কোণের সমান অথবা স্থানাদিক হইবে অতএব খগ চাপ  
যথা ওট চাপের সম্বন্ধে খছগ কোণ তথা ওজ্জ্বল কোণের সম্বন্ধে  
হইবে (৫৫ সংজ্ঞা) অধিকন্তু খছগ কোণ যথা ওজ্জ্বল  
সম্বন্ধে খকগ কোণ তথা ওঘট সম্বন্ধে (৫১৫) কেননা  
এখমোক্ত দুই কোণ ক্রমশঃ অপর দুই কোণের দ্বিগুণ  
(৩২০) অতএব খগ চাপ যথা ওট চাপ সম্বন্ধে খছগ কোণ  
তথা ওজ্জ্বল কোণ সম্বন্ধে এবং খকগ কোণ তথা ওঘট কোণ  
সম্বন্ধে উপপন্ন হইল।

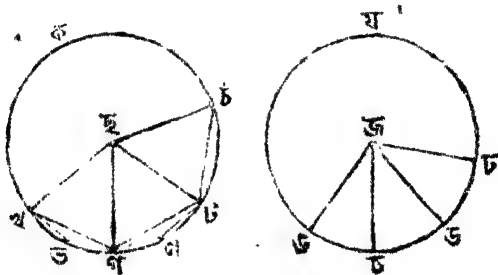
অপিচ খগ চাপ যথা ওট চাপ সম্বন্ধে খছগ বৃত্তছেদক তথা  
ওজ্জ্বল বৃত্তছেদক সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে। খগ এবং গট সংযুক্ত

Also, as the arch BC to EF, so is the sector BGC to the sector EHF. Join BC, CK, and in the arches BC, CK take any points X, O, and join BX, XC, CO, OK: Then, because in the triangles GBC, GCK, the two sides BG, GC are equal to the two CG, GK, and also contain equal angles; the base BC is equal (4. 1.) to the base CK, and the triangle GBC to the triangle GCK: And because the arch BC is equal to the arch CK, the remaining part of the whole circumference of the circle ABC is equal to the remaining part of the whole circumference of the same circle: Wherefore the angle BXC is equal to the angle COK (27. 3.); and



the segment BXC is therefore similar to the segment COK (Def. 9. 3.), and they are upon equal straight lines BC, CK: But similar segments of circles upon equal straight lines are equal (24. 3.) to one another. Therefore the segment BXC is equal to the segment COK: And the triangle GBC is equal to the triangle CGK; therefore the whole, the sector BGC is equal to the whole, the sector CGK. For the same reason, the sector KGL is equal to each of the sectors BGC, CGK: and in the same manner, the sectors EHF, FHM, MHN may be proved equal to one another. Therefore, what multiple soever the arch BL is of the arch BC, the same multiple is the sector BGL of the sector BGC. For the same reason, whatever multiple the arch EN is of EF, the same multiple is the

কর এবং খগ গট দুই চাপে ভগ একই বিন্দু নির্দেশ করিয়া  
খভ ভগ গগ টে সংযুক্ত কর। অপর খহগ গছট যি ভূজে থহ  
ছগ এবং গছট দুইই বাজ এবং এই বাজের সমানান্তি একই কোণ  
সমান ৩৩৩। ৩ খগ গনি গট লম্বির এবং খতগ যি ভূজ গছট  
ত্রিভুজের সমান হইবে (১৪)। অধিকন্তু খগ চাপ গট চাপের



সমান হওয়াতে কখগ বৃত্তখণ্ডটিতে ৩ আয়তের সম্বন্ধে অংশও  
পরস্পর সমান হইবে একারণে খভগ কোণ গট কোণের সমান  
( ৩৩৩ ) ততএব খভগ বৃত্তখণ্ড গট বৃত্তখণ্ডের সমান  
( ৩৩৩ ) পরন্তু এই দুই খণ্ড খগ গট সমান রেখার উপরিত্ত  
আছে আর সমান বৃত্তখণ্ড সমানই বরষ রেখার উপরিত্ত  
হইবে পরস্পর সমান হয় ( ৩৩৩ ) অতএব খভগ বৃত্তখণ্ড  
গট গটের সমান হইবে। অপর খহগ ত্রিভুজও গছট ত্রিভু  
জের সমান উপপন্ন হইয়াছে অতএব খছগ সমান বৃত্ত ছেদক  
গছট বৃত্ত ছেদকের সমান সমান হইবে। এই কারণে উঠট  
বৃত্ত ছেদক খহগ অথবা গছট বৃত্ত ছেদকের সমান হইবে।  
তদ্রূপ ওজচ চজড ডজচ তিন বৃত্ত ছেদকও পরস্পর সমান উপ  
পন্ন হইবে অতএব খঠ চাপ যে পরিমাণে খগ চাপের অপবর্ত্ত  
খছট বৃত্ত ছেদকও সেই পরিমাণে খছগ বৃত্ত ছেদকের অপবর্ত্ত  
হইবে। এই কারণে ওচ চাপ যে পরিমাণে ওচ চাপের অপবর্ত্ত  
ওজচ বৃত্ত ছেদকও সেই পরিমাণে ওজচ বৃত্ত ছেদকের অপ  
বর্ত্ত হইবে। অপর খঠ চাপ যদি ওচ চাপের সমান হয় তবে



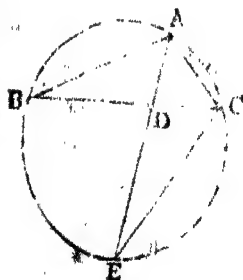
sector EHN of the sector EHP: Now, if the arch BL be equal to EN, the sector BGL is equal to the sector EHN; and if the arch BL be greater than EN, the sector BGL is greater than the sector EHN; and if less, less: Since, then, there are four magnitudes, the two arches BC, EF, and the two sectors BGC, EHF; and of the arch BC, and sector BGC, the arch BL and the sector BGL are any equimultiples whatever: and of the arch EF, and sector EHF, the arch EN and sector EHN are any equimultiples whatever: and it has been proved, that if the arch BL be greater than EN, the sector BGL is greater than the sector EHN: if equal, equal; and if less, less; therefore (Def. 5. 5.) as the arch BC is to the arch EF, so is the sector BGC to the sector EHF. Wherefore in equal circles, &c. Q. E. D

### PROP. B. THEOR.

*If an angle of a triangle be bisected by a straight line which likewise cuts the base; the rectangle contained by the sides of the triangle is equal to the rectangle contained by the segments of the base, together with the square of the straight line bisecting the angle*

Let ABC be a triangle, and let the angle BAC be bisected by the straight line AD; the rectangle BA.AC is equal to the rectangle BD.DC, together with the square of AD.

Describe the circle (5. 4.) ACB about the triangle, and produce AD to the circumference in E, and join EC. Then, because the angle

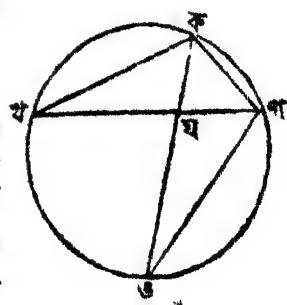


খচ্চট বৃত্ত ছেদকও ওজ্জট বৃত্ত ছেদকের সমান হইবে এবং খট চাপ যদি ওট চাপের অধিক হয় তবে খচ্চট বৃত্ত ছেদকও ওজ্জট বৃত্ত ছেদকের অধিক হইবে আর ঐ চাপ স্থান হইলে বৃত্ত ছেদকও ন্যূন হইবে অতএব এখানে চারি রাশির নির্দেশ হইল অর্থাৎ খগ ওট দুই চাপ এবং খহগ ওজ্জট দুই বৃত্ত ছেদক। খগ চাপের ও খহগ বৃত্ত ছেদকের খট চাপ এবং খচ্চট বৃত্ত ছেদক যে কোন প্রকারে সম অপবর্ত্ত্য তথা ওট চাপের এবং ওজ্জট বৃত্ত ছেদকের ওট চাপ এবং ওজ্জট বৃত্ত ছেদক তদ্রূপ সম অপবর্ত্ত্য সিদ্ধ হইয়াছে এবং ইহাও সপ্রমাণ হইয়াছে যে খট চাপ ওট চাপের সমান অথবা ন্যূনাদিক হইলে খচ্চট বৃত্ত ছেদকও ওজ্জট বৃত্ত ছেদকের সমান অথবা ন্যূনাদিক হইবে সুতরাং খগ চাপ যথা ওট চাপ সম্বন্ধে খহগ বৃত্ত ছেদকও তথা ওজ্জট বৃত্ত ছেদকের সম্বন্ধে উপপন্ন হইল (৫।৫নং জ্ঞা) অতএব সমান বৃত্ত ইত্যাদি। ইদাই এখানে উপপাদ্য।

### খ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের এক কোণ যদি কোন সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই রেখা যদি ভূমিকেও ছিন্ন করে তবে ত্রিভুজের দুই বাহুর আয়ত ভূমিখণ্ডের আয়ত এবং কোণ দ্বিখণ্ড কারক সরল রেখার সমচতুর্ভুজের যোগ সমান হইবে।

কথং ত্রিভুজের খকগ কোণ কখ সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কল্পনা কর তাহাতে খক.কগ আয়ত কখ. যগ আয়ত এবং কখ রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য হইবে। কথং ত্রিভুজের উপর কখগ বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া (৪।৫) কখ রেখাকে পরিধিস্থ ও বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং ওগ



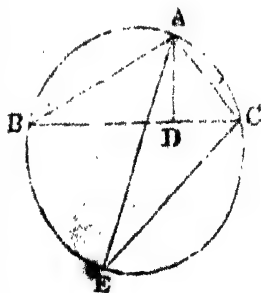
BAD is equal to the angle CAE, and the angle ABD to the angle (21. 3.) AEC, for they are in the same segment; the triangles ABD, AEC are equiangular to one another: Therefore  $BA : AD :: EA : AC$  (4. 6.) and consequently  $EA.AC = AD.AE$  (16. 6.)  $= ED.DA. + DA^2$  (3. 2.) But  $ED.DA = BD.DC$  (35. 3.), therefore  $BA.AC = BD.DC + DA^2$ . Wherefore if an angle, &c. Q. E. D.

### PROP. C. THEOR.

*If from any angle of a triangle a straight line be drawn perpendicular to the base; the rectangle contained by the sides of the triangle is equal to the rectangle contained by the perpendicular, and the diameter of the circle described about the triangle.*

Let ABC be a triangle, and AD the perpendicular from the angle A to the base BC; the rectangle BA.AC is equal to the rectangle contained by AD and the diameter of the circle described about the triangle.

Describe (5. 4.) the circle ACB about the triangle, and draw its diameter AE, and join EC: Because the right angle BDA is equal (31. 3.) to the angle ECA in a semicircle, and the angle ABD to the angle AEC, in the same segment (21. 3.) the triangles ABD, AEC, are equiangular: Therefore, (4. 6.) as BA to AD, so is EA to AC: and consequently the rectangle BA.AC is equal (16. 6.) to





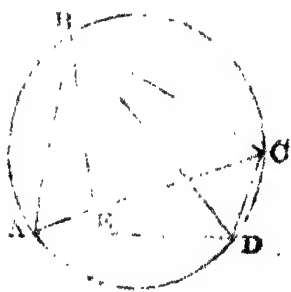
the rectangle EA.AD. If, therefore, from any angle, &c. Q. E. D.

### PROP. D. THEOR.

*The rectangle contained by the diagonals of a quadrilateral inscribed in a circle, is equal to both the rectangles contained by its opposite sides.*

Let ABCD be any quadrilateral inscribed in a circle, and let AC, BD be drawn; the rectangle AC.BD is equal to the two rectangles AB.CD, and AD.BC.

Make the angle ABE equal to the angle DBC: add to each of these the common angle EBD, then the angle ABD is equal to the angle EBC: And the angle BDA is equal to (21. 3.) the angle BCE, because they are in the same segment; therefore the triangle ABD is equiangular to the triangle BCE. Wherefore (4. 6.)  $BC : EC :: BD : DA$ , and consequently (16. 6.)  $BC.DA = BD.CE$ . Again, because the angle ABE is equal to the angle DBC, and the angle (21. 3.) BAE to the angle BDC,



the triangle ABE is equiangular to the triangle BCD; therefore  $BA : AE :: BD : DC$ , and  $BA.DC = BD.AE$  (16. 6.): But it was shewn that  $BC.DA = BD.CE$ ; wherefore  $BC.DA + BA.DC = BD.CE + BD.AE = BD.AC$  (1. 2.). That is, the rectangle contained by BD and AC is equal to the rectangles contained by AB and CD, and AD and BC. Therefore the rectangle, &c. Q. E. D.

কগ আয়ত ওক, কঘ আয়ত তুল্য উপপন্ন হইল। অতএব ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

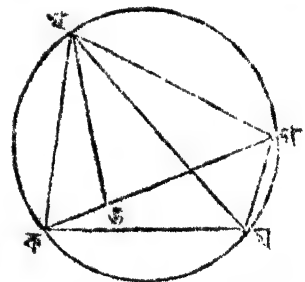
য প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

বৃত্তের অন্তর্গত চতুর্ভুজ ক্ষেত্র দুই কর্ণের আয়ত এই ক্ষেত্রদ্বয়ের সমুখস্থ রেখাংশদ্বয় দুই আয়তের তুল্য।

কথগয চতুর্ভুজ ক্ষেত্র কোন বৃত্তের অন্তর্গত কর্ণের আয়ত এবং কখ ও ঘগ কর্ণ নির্দেশিত কর তাহাতে খঘ-কগ আয়ত কথগয এবং কঘ, ঘগ দুই আয়তের তুল্য হইবে।

কথও কোন যখগ কোণের সমান করিয়া নির্দেশিত কর এবং তাহাদের প্রত্যেক ওখঘ কোণ যোগ কর তাহাতে কখঘ কোণ ওখগ কোণের সমান হইবে। অপর খঘক কোণ খগক কোণের সমান কেননা তাহারা এক বৃত্ত খাওয়াতে আছে।

(৩২১) অতএব কখঘ এবং খঘগ দুই ত্রিভুজ সমান কোণি উপপন্ন হইল। সুতরাং খগ : গঙ :: খঘ : ঘক (৩৪) এবং ঘগ.ঘক = গঙ.খঘ (৩।১৬)। অপর কথও কোন যখগ সমান এবং খকও কোন খঘগ সমান (৩০।১) তদ্বিগিন্ত কথও ত্রিভুজ খঘঘ ত্রিভুজের সমান কোণি

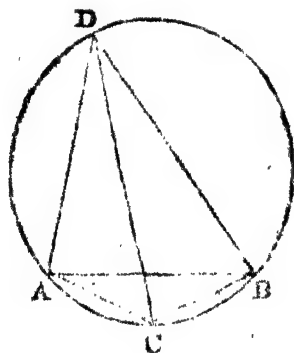


অতএব খক : কঙ :: খঘ : ঘগ সুতরাং খক.ঘগ = খঘ.কঙ (৩।১৬) পরন্তু পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে খগ. ঘক = খগ. গঙ সুতরাং খক.ঘগ + খগ. ঘক = খঘ. কঙ + খঘ. গঙ = খঘ. কগ (২।১) অর্থাৎ খঘ এবং কগ দুই কর্ণের আয়ত গগ এবং কঘ তথা কথ এবং গঘ সমুখস্থ রেখাংশদ্বয় দুই আয়ত তুল্য। অতএব বৃত্তের অন্তর্গত ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. E. THEOR.

*If an arch of a circle be bisected, and from the extremities of the arch, and from the point of bisection straight lines be drawn to any point in the circumference; the sum of the two lines drawn from the extremities of the arch will have to the line drawn from the point of bisection, the same ratio which the straight line subtending the arch has to the straight line subtending half the arch.*

Let ABD be a circle, of which AB is an arch bisected in C, and from A, C, and B to D, any point whatever in the circumference, let AD, CD, BD be drawn; the sum of the two lines AD and BD has to DC the same ratio that BA has to AC.

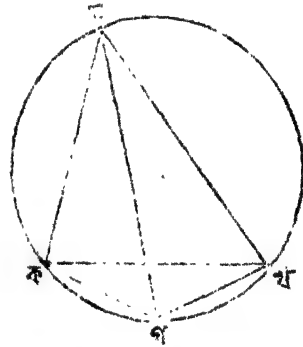


For since ACBD is a quadrilateral inscribed in a circle, of which the diagonals are AB and CD,  $AD \cdot CB + DB \cdot AC$  (D. 6.) =  $AB \cdot CD$ ; but  $AD \cdot CB + DB \cdot AC = AD \cdot AC + DB \cdot AC$ , because  $CB = AC$ . Therefore  $AD \cdot AC + DB \cdot AC$ , that is (1. 2.),  $(AD + DB) \cdot AC = AB \cdot CD$ . And because the sides of equal rectangles are reciprocally proportional (14. 6.)  $AD + DB : DC :: AB : AC$ . Wherefore, &c. Q. E. D.

### ও প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

বৃত্তের কোন চাপ দ্বিখণ্ডিত হইলে যদি চাপের দুই প্রান্ত এবং দ্বিখণ্ডিত টুকু হইতে পারিস্বর কোন বিন্দু পর্য্যন্ত একই সরল রেখা নিষ্কাশিত হয় তবে প্রান্ত হইতে নিষ্কাশিত দুই রেখা একত্র যোগে দ্বিখণ্ডিত টুকু হইতে নিষ্কাশিত রেখার সম্যক্কে যে নিষ্কাশিত পরিমাণ পারণ করিলে তাহা চাপের সম্মুখের সমস্ত রেখার তাপাদ্ধি সম্মুখের সরল রেখা সম্বন্ধীয় নিষ্কাশিত পরিমাণের তুল্য হইবে ।

কথঞ্চিৎ কল্পনা কর  
এতদ্ব্যকথ চাপ গ বিন্দুতে  
দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে এবং  
ক, গ, খ তিন বিন্দু হইতে  
পারিস্বর য় বিন্দু পর্য্যন্ত  
একই সরল রেখা অর্থাৎ কয়  
গয় খয় নিষ্কাশিত হইয়াছে  
কয় যয় একত্র যোগে গয়  
সম্যক্কে যে নিষ্কাশিত পরি-



মাণ ধারণ করে তাহা কয় রেখার কয় সম্বন্ধীয় নিষ্কাশিত পরি-  
মাণ তুল্য ।

কয়খয় বৃত্তান্তর্গত চতুর্ভুজ ক্ষেত্র হওয়াতে এবং কয় গয়  
তাহার কর্ণ হওয়াতে কয়.খগ + খয়.কগ = কয়.গয়  
( ৩য় প্র ) পরন্তু কয়.খগ + খয়.কগ = কয়.কগ +  
খয়.কগ কেননা কগ = খগ অতএব কয়.কগ + খয়.কগ  
অর্থাৎ ( কয় + খয় ) কগ = কয়.গয় অপর সমানত্ব আ-  
তের বাহ্য উভয়তঃ অনুপাতীয় হয় একারণ ( ৬।১৪ ) কয় +  
খয় : গয় :: কয় : কগ অতএব বৃত্তের কোন চাপ ইত্যাদি  
ইহাই অন্তর্গত উপপাদ্য ।

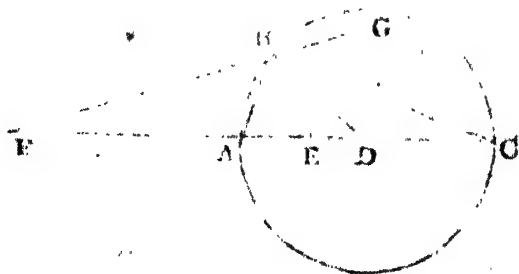


## PROP. F. THEOR

*If two points be taken in a straight line passing through the centre of a circle, such that the rectangle contained by the segments intercepted between them and the centre of the circle be equal to the square of the radius; and if from these points two straight lines be drawn to any point whatsoever in the circumference of the circle, the ratio of these lines will be the same with the ratio of the segments intercepted between the two first mentioned points and the circumference of the circle.*

Let ABC be a circle, of which the centre is D, and CAF a straight line passing through the centre D. In CAF take two points E, F, such that the rectangle FD.DE is equal to the square of AD. Since  $ED.DE = AD.AD$   $ED : AD :: AD : DE$  (17. 6.) and therefore if ED is less than AD, AD is less than DE (14. 5.); therefore if one of the points as E is within the circle the other F will be out of the circle.

Let B be any point in the circumference of the circle, and draw straight lines EB, FB.  $FB : BE :: FA : AE$ .



Join BD and BA, and because the rectangle FD.DE



is equal to the square of AD, that is, of BD, FD.  
 $DB : DB : BE$  (17. 6.)

The two triangles FDB, BDE have therefore the sides proportional that are about the common angle D; hence, they are equiangular (6. 6.), the angle DBE being equal to the angle DFB. Again, since DB is equal to DA, the angle DBA is equal to DAB (5. 1.); but DBA is the sum of DBE and EBA, and DAB is the sum of AFB and FBA (32. 1.); therefore the sum of DBE and EBA is equal to the sum of AFB and FBA; from these equals take away the equal angles DBE and AFB, and the remaining angles EBA and FBA will be equal. Thus, it appears, that, in the triangle FBE, the line BA bisects the angle FBE; therefore  $FB : BE :: FA : AE$  (2. 6.). Therefore, &c. Q. E. D.

Cor. The ratio of the straight lines FB, BE, is also the same with the ratio of FC, CE, C being the point in which FE produced meets the circle: For produce FB to G, and join BC.

Because the angles FBE, EBG make together two right angles (13. 1.), and therefore are equal to twice the sum of ABE and EBC, which make one right angle; and it has been shewn, that FBE is double ABE, therefore EBG is double EBC; hence it appears that the outward angle EBG is bisected by BC; therefore  $FB : BE :: FC : CE$  (A. 6.).

### PROP. G. THEOR.

*If from the extremity of the diameter of a circle a straight line be drawn in the circle, and if either within the circle, or produced without it, it meet a line perpen-*

খঙ ( ৬/১৭ ) অতএব চখথ এবং খখঙ দুই ত্রিভুজের সামান্য  
 ন কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে সুতরাং তাহারা  
 সমান কোণি সপ্রমাণ হইল ( ৬/৬ ) এবং যখঙ কোণ খচঘ  
 কোণের সমান অপর খঘ এবং কঘ সমান হওয়াতে যকথ  
 কোণ যখক কোণের সমান ( ১/৫ ) কিন্তু যখক কোণ  
 যখঙ এবং ওখক কোণের যোগ তুল্য এবং যকথ কোণ কচথ  
 এবং কখচ কোণের যোগতুল্য ( ১/৩২ ) অতএব যখঙ এবং  
 ওখক কোণের যোগ কচথ এবং কখচ কোণের যোগ তুল্য হইল  
 সুতরাং যখঙ এবং কচথ সমান২ কোণ উভয়তঃ বিয়োগ  
 করিলে অবশিষ্ট ওখক কোণ কখচ কোণের তুল্য হইবে  
 অতএব এমত উপপন্ন হইল যে খচঙ ত্রিভুজে চখঙ কোণ  
 কথ রেখা দ্বারা দ্বিখঙ হইয়াছে এবং চখ : খঙ :: চক :  
 কঙ ( ৬/৩ ) । ইহাই এতলে উপপাদ্য ।

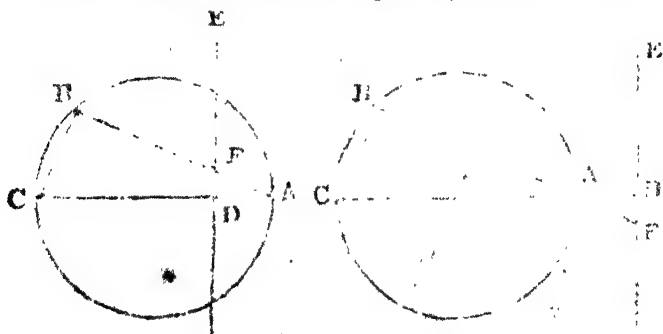
অনুমান । চঙ রেখা পরিধিস্ত গ বিন্দু পর্যন্ত বর্দ্ধিত  
 করিলে চখ খঙ সরল রেখার পরস্পর নিষ্পত্তি চগ গঙ  
 রেখার নিষ্পত্তি তুল্য হইবে । চখ চ পর্যন্ত বর্দ্ধি করিয়া খগ  
 সংযুক্ত কর । চখঙ এবং ওখছ একত্র যোগে দুই সমকোণ  
 তুল্য ( ১/১৩ ) সুতরাং তাহারা কখঙ এবং ওখগ কোণের  
 দ্বিগুণ কেননা এই দুই কোণ একত্র যোগে এক সমকোণ তুল্য ।  
 অপর পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে চখঙ কোণ কখঙ কোণের  
 দ্বিগুণ অতএব ওখছ কোণ ওখগ কোণের দ্বিগুণ তন্নিমিত্ত  
 চখঙ ত্রিভুজের বহিস্থ ওখছ কোণ খগ দ্বারা দ্বিখঙিত  
 উপপন্ন হইতেছে অতএব চখ : খঙ :: চগ : গঙ ( ৬/ক ) ।

### ছ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য ।

বৃত্ত ব্যাসের অগ্র হইতে বৃত্ত মধ্যে যদি কোন সরল রেখা  
 নিকাসিত হয় এবং যদি ঐ সরল রেখা মধ্যেই হউক অথবা  
 বর্দ্ধিত হইয়া বাহিরেই হউক উক্ত ব্যাসের কোন লম্ব রেখার  
 সম্পত্তি হয় তবে বৃত্ত মধ্যস্থ ঐ রেখা এবং ব্যাসাংশ ও লম্বের

*dicular to the same diameter ; the rectangle contained by the straight line drawn in the circle, and the segment of it, intercepted between the extremity of the diameter and the perpendicular, is equal to the rectangle contained by the diameter, and the segment of it cut off by the perpendicular.*

Let ABC be a circle, of which AC is the diameter, let DE be perpendicular to the diameter AC, and let AB meet DE in F; the rectangle BA.AF is equal to the rectangle CA.AD. Join BC, and because ABC is an angle in a semicircle, it is a right angle (31. 3.) Now,



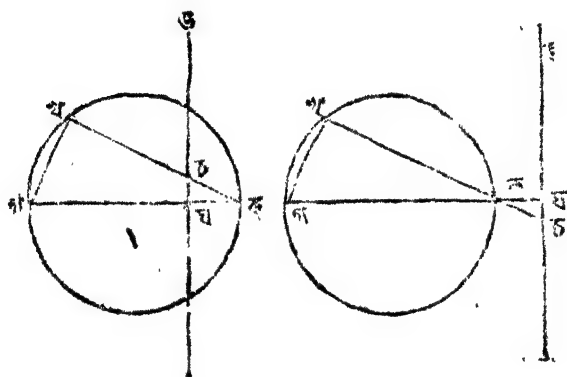
ang.  $\angle ADE$  is also a right angle (Hyp.); and the angle  $BAC$  is either the same with  $DAF$ , or vertical to it; therefore the triangles  $ABC$ ,  $ADF$ , are equiangular, and  $BA : AC :: AD : AF$  (4. 6.); therefore also the rectangle  $BA.AF$  contained by the extremes is equal to the rectangle  $AC.AD$  contained by the means. (16. 6.) If therefore, &c. Q. E. D.

### PROP. II. THEOR.

*The perpendiculars drawn from the three angles of any triangle to the opposite sides intersect one another in the same point.*

মধ্যবর্ত্তি তৎখণ্ডে উৎপন্ন আয়ত ব্যাস এবং লম্ব দ্বারা ছিন্ন তৎখণ্ডে উৎপন্ন আয়তের তুল্য হইবে ।

কথগ বৃত্তের কগ ব্যাস কল্পনা করিয়া তাহার উপর বঙ লম্ব পাত কর সেই লম্বস্থ চ বিন্দুতে কথ রেখার সম্পাত হউক খক.কচ আয়ত গক.কঘ আয়ত তুল্য হইবে । গগ সংযুক্ত কর



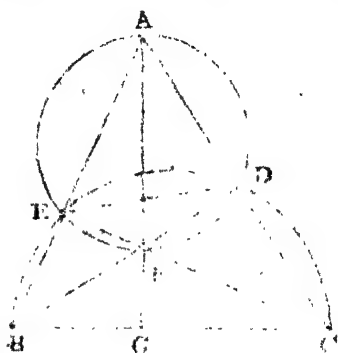
কথগ কোণ অর্দ্ধ বৃত্তস্থ প্রযুক্ত সমকোণ (৭৩৩১) এবং কল্পনানুসারে কঘচ কোণও সম কোণ অপর খকগ এবং ঘকচ একই কোণ অথবা পরস্পরের সম্মুখস্থ কোণ একারণ কথগ এবং ঘকচ ত্রিভুজ সমান কোণি সূত্রাং খক : কগ :: কঘ : কচ (৬৪) অতএব দুই অন্ত্য রেখার খক.কচ আয়ত নব্য রেখার কগ.কঘ আয়ত তুল্য হইল (৬১৬) । সূত্রাং বৃত্ত ব্যাসের ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

### জ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য ।

ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ হইতে সম্মুখস্থ বাহুর উপর লম্বপাত করিলে এক বিন্দুতেই সে সকল লম্বের পরস্পর সম্পাত হইবে ।

Let  $ABC$  be a triangle, and  $BD$ , and  $CE$  two perpendiculars intersecting one another in  $F$ : let  $AF$  be joined, and produced if necessary, let it meet  $BC$  in  $G$ ;  $AG$  is perpendicular to  $BC$ .

Join  $DE$ , and because  $AEF$  is a right angle, a circle described about the triangle  $AEF$  will have  $AF$  for a diameter (31. 1.); Also, because  $ADF$  is a



right angle, a circle described about the triangle  $ADF$  will have  $AF$  for a diameter; therefore the points  $A$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $D$  are in the circumference of the same circle. And because the angles  $BEC$ ,  $BDC$  are right angles, it may be shewn, in the same manner, that the points  $B$ ,  $E$ ,  $D$ ,  $C$  are in the circumference of the same circle, viz. that which has  $BC$  for its diameter: Let the circle  $AEDF$  and the semicircle  $BEDC$  be described (31. 3.). Then, the angles  $FED$ ,  $FAD$ , or  $CED$ ,  $GAC$ , being in the same segment, will be equal (21. 3.): And in like manner it appears, that the angle  $CBD$  is equal to  $CED$  (21. 3.) therefore the angle  $CBD$  is equal to  $GAC$ . The two triangles  $CBD$ ,  $CAG$  have therefore the angle  $CBD$  equal to  $CAG$ , and the angle  $GCD$  common, wherefore the remaining angles  $CDB$ ,  $CDA$  are equal (32. 1.); now  $CDB$  is a right angle; therefore  $CGA$  is also a right angle, and  $AG$  is perpendicular to  $BC$ . Therefore, &c. Q. D. E.





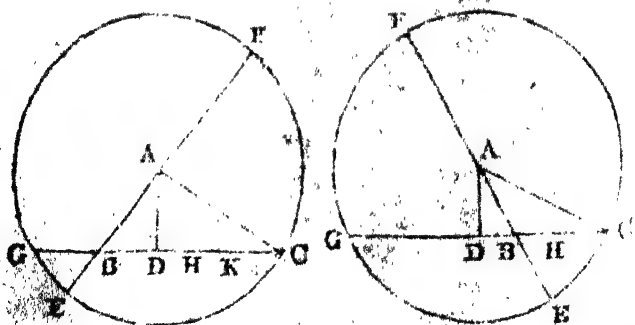
**COR.** The triangle ADE is similar to the triangle ABC. For the two triangles BAD, CAE having the angles at D and E right angles, and the angle at A common, are equiangular, and therefore  $BA : AD :: CA : AE$ , and alternately  $BA : CA :: AD : AE$ ; therefore the two triangles BAC, DAE, have an angle at A common, and the sides about that angle proportionals, therefore they are equiangular (6. 6) and similar.

Hence the rectangles BA AD, CA AE are equal.

### PROP. K. THEOR.

*If from any angle of a triangle a perpendicular be drawn to the opposite side or base; the rectangle contained by the sum and difference of the other two sides is equal to the rectangle contained by the sum and difference of the segments into which the base is divided by the perpendicular.*

Let ABC be a triangle, and AD a perpendicular drawn from the angle A on the base BC, so that BD, DC are the segments of the base:  $(AC + AB)(AC - AB) = (CD + DB)(CD - DB)$ .



From A as a centre with the radius AC, the greater of the two sides, describe the circle CFG; produce

১৩। নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যেই হউক কিম্বা বাহিরেই হউক দুই পূর্ণজ্যার পরস্পর সম্পাত হইলে তাহারদের অন্তরস্থিত কোণ তাহারদের মধ্যবর্ত্তি দুই চাপের যোগাত্মক তুল্য [অর্থাৎ বৃত্তের মধ্যে জ্যাসম্পাত হইলে উক্ত দুই চাপের যোগ তুল্য এবং বাহিরে বাহিরে সম্পাত হইলে অন্তর তুল্য] কোন চাপো-  
পর কেন্দ্রস্থ কোণের অর্দ্ধেক হইবে।

১৪। কোন বৃত্তের ব্যাস বিন্দ্বিত হইলে তাহাতে এমন এক বিন্দুর নির্দেশ করিতে হইবে যেখান হইতে বৃত্ত স্পর্শক রেখা নিষ্কাশিত করিলে ব্যাসের সমান হইবে।

১৫। কোন বৃত্ত পরিধিতে এমন এক বিন্দুর নির্দেশ করিতে হইবে যেখান হইতে পরিধিহীন অন্য দুই নির্দিষ্ট বিন্দু পর্য্যন্ত রেখা নিষ্কাশিত করিলে যে দুই রেখার পরস্পর সম্বন্ধে নির্দিষ্ট পরিমাণে নিম্পত্তি হইবে।

১৬। কোন বৃত্তের ব্যাসে কেন্দ্র বাতীত অন্য কোন বিন্দু দ্রষ্ট হইলে ঐ বিন্দু দিয়া যত চাপ টানা যাইতে পারে তাহা মধ্যে ব্যাসের লম্ব সর্বাধিক ক্ষুদ্র হইবে।

১৭। দুই সমকেন্দ্র বৃত্তকে ছেদ করিয়া এক সরল রেখা নিষ্কাশিত করিতে হইবে যেন বৃত্তের বৃত্ত পরিধির মধ্যস্থিত অংশ ক্ষুদ্রতর পরিধি মধ্যস্থিত অংশের দ্বিগুণ হয় কিন্তু বৃহ-  
তর বৃত্তের কর্ণট ক্ষুদ্রতরের কর্ণটির দ্বিগুণ অপেক্ষা অধিক হইবে না।

১৮। বৃত্ত পরিধিহীন কোন দুই বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক রেখায় কোন এক বিন্দু পর্য্যন্ত যদি দুই সরল রেখা টানা যায় তবে স্পর্শচিহ্ন পর্য্যন্ত রেখা নিষ্কাশিত করিলে তদ্বারা সর্বা-  
ধিক বৃহৎ কোণ উৎপন্ন হইবে।

১৯। বৃত্তের মধ্যে যদি এক পূর্ণজ্যা অন্য কোন পূর্ণজ্যাকে দ্বিগুণ করে এবং প্রত্যেক জ্যার দুই অগ্র হইতে স্পর্শক রেখা যদি নিষ্কাশিত হইয়া পরস্পর সম্পাতিত হয় তবে যে রেখা

duced to meet ; the line joining their points of intersection will be parallel to the bisected chord.

20. If two circles cut each other ; the greatest line that can be drawn through the point of intersection to the two circumferences is that which is parallel to the line joining their centres.

21. If the tangents drawn to every two of three unequal circles be produced till they meet : the points of intersection will be in a straight line.

---

### SECTION III.

22. Any side of a triangle is greater than the difference between the other two sides.

23. In any right-angled triangle, the straight line joining the right angle and the bisection of the hypotenuse is equal to half the hypotenuse.

24. If from any point within an equilateral triangle perpendiculars be drawn to the sides ; they are together equal to a perpendicular drawn from any of the angles to the opposite side.

25. If the points of bisection of the sides of a given triangle be joined ; the triangle so formed will be one fourth of the given triangle.

26. The difference of the angles at the base of any triangle is double the angle contained by a line drawn from the vertex perpendicular to the base, and another bisecting the angle at the vertex.

দ্বারা সম্পাত চিহ্নে সংযুক্ত হয় সেই রেখা দ্বিখণ্ডিত জ্যার সমা-  
নান্তরাল হইবে।

২০। দুই বৃত্ত যদি পরস্পরকে ছিন্ন করে তবে ছেদ চিহ্ন  
দ্বারা দুই পরিধিতে যে রেখা নিষ্কাশিত হইতে পারে তন্মধ্যে  
তাহারদের কেন্দ্র সংযোগক রেখা সর্বাঙ্গপেক্ষা বৃহৎ হইবে।

২১। তিন বিন্দু বৃত্তের মধ্যে কোন দুই বৃত্তের সামান্য  
আংশক রেখা নিষ্কাশিত করিয়া বর্দ্ধিত করিলে তাহারদের  
সম্পাত চিহ্ন এক রেখান্ত হইবে।

### ৩ পরিচ্ছেদ।

২২। ত্রিভুজের কোন বাহু অন্য দুই বাহুর অন্তর হইতে  
অধিক।

২৩। সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণ হইতে কর্ণের মধ্য বিন্দু  
যে রেখা নিষ্কাশিত করিলে সে রেখা কর্ণের অর্দ্ধাংশ তুল্য  
হইবে।

২৪। সম বাহু ত্রিভুজের অন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহু  
দ্বয়ের উপর যদি লম্বপাত করা যায় তবে কোন কোণ হইতে  
সমকোণ ত্রিভুজোপরি লম্বপাত করিলে সেই লম্ব উক্ত লম্ব স-  
কলের যোগ তুল্য হইবে।

২৫। নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বাহু সকল দ্বিখণ্ডিত হইলে দ্বিখ-  
ণ্ডন চিহ্ন সকল যদি সংযুক্ত হয় তবে তদুৎপন্ন ত্রিভুজ নির্দিষ্ট  
ত্রিভুজের চতুর্থাংশ হইবে।

২৬। ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুই কোণের অন্তর শূন্য হইতে  
পতিত ভূমির লম্ব এবং শূন্যস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী রেখার  
মধ্যবর্ত্তি কোণের দ্বিগুণ হইবে।

২৭। এক ভূমির উপর যে সমকোণ ত্রিভুজ হইতে পারে  
তাহার মধ্যে সমকোণি ত্রিভুজের বাহুর যোগ সর্বাঙ্গপেক্ষা  
স্থান।

27. The sum of the sides of an isosceles triangle is less than the sum of the sides of any other triangle on the same base and between the same parallels.

28. Of all triangles having the same vertical angle, and whose bases pass through a given point, the least is that whose base is bisected in the given point.

29. To bisect a given triangle by a line drawn from a given point in one of its sides.

30. To determine a point within a given triangle, from which lines drawn to the several angles, will divide the triangle into three equal parts.

31. To trisect a given triangle from a given point within it.

32. From a given point in the side of a triangle, to draw lines which will divide the triangle into parts which shall have a given ratio.

---

#### SECTION IV.

33. To bisect a parallelogram by a line drawn from a point in one of its sides.

34. To bisect a trapezium by a line drawn from one of its angles.

35. To bisect a trapezium by a line drawn from a given point in one of its sides.

36. The area of any two parallelograms described on the two sides of a triangle is equal to that of a parallelogram on the base, whose side is equal and parallel

২৮। যে২ ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ সমান। অথচ ভূমি এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে সংলগ্ন তাহাদের নথো যে ত্রিভুজের ভূমি ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত সেই ত্রিভুজ সর্ভাপেক্ষ ক্ষুদ্র।

২৯। এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন এক বাহু পর্য্যন্ত নিক্ষিপ্ত সরল রেখার দ্বারা এক ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩০। কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তরে এমন এক বিন্দু নির্দেশ করিতে হইবে যেখান হইতে সকল কোণ পর্য্যন্ত রেখা টানিলে ত্রিভুজ তিন সমান ভাগে বিভক্ত হইবে।

৩১। ত্রিভুজের অন্তরস্থ কোন কোণ হইতে ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩২। ত্রিভুজের কোন বাহুর নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতিপয় রেখা টানিতে হইবে যেন তদ্বারা নির্দিষ্ট পরিমাণে পর-পর নিম্নস্ব কতিপয় অংশে ঐ ত্রিভুজ বিভক্ত হয়।

### ৪ পরিচ্ছেদ।

৩৩। সমানান্তরাল ক্ষেত্রের বাহুস্থ কোন বিন্দু হইতে নিক্ষিপ্ত রেখা দ্বারা ঐ ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৪। বিষম চতুর্ভুজের কোন কোণ হইতে নিক্ষিপ্ত রেখা দ্বারা ঐ ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৫। বিষম চতুর্ভুজের কোন বাহুস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নিক্ষিপ্ত রেখার দ্বারা ঐ ক্ষেত্র দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৬। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিক্ষিপ্ত হইলে যদি ভূমিরও উপর তদ্রূপ ক্ষেত্র নিক্ষিপ্ত হয় এবং ভূমির উপরিস্থ ক্ষেত্রের বাহু যদি পূর্কোক্ত দুই ক্ষেত্রের

to the line drawn from the vertex of the triangle to the intersection of the two sides of the former parallelograms produced to meet.

Deduce Euclid 47. I., as a particular case of this.

37. If squares be described on the hypotenuse and sides of a right-angled triangle, and the extremities of the sides of the former and the adjacent sides of the others be joined; the sum of the squares of the lines joining them will be equal to five times the square of the hypotenuse.

#### SECTION V.

38. To determine a point in a line given in position, to which lines drawn from two given points may have the greatest difference possible.

39. To divide a straight line into two parts such, that the rectangle contained by them may be equal to the square of their difference.

40. To determine two lines such that the sum of their squares may be equal to a given square, and their rectangle equal to a given rectangle.

41. Through a given point to draw a line terminating in two lines given in position, so that the rectangle contained by the two parts may be equal to a given rectangle, but this rectangle must not be less than that contained between the segments of the perpendicular from the point on either of the lines.

বর্জিত বাহুর সম্পাত চিত্র পর্য্যাপ্ত হইতে নিরূপিত রেখার সমান এবং সমানান্তরাল হয় তবে বাহুর উপরিস্থ দুই ক্ষেত্র ভূমির উপরিস্থ ক্ষেত্রের তুল্য হইবে ।

ইউক্লিডের ১ অধ্যায়ের ৪৭ প্রতিজ্ঞা এস্থলে অল্পমান সিদ্ধ কর ।

৩৭। সম কোণি ত্রিভুজের কর্ণ এবং ভূজ কোটির উপর সম চতুর্ভুজ ক্ষেত্র নিরূপিত হইলে যেন কর্ণোপরিস্থ চতুর্ভুজের ভূজাংশ ভূজ কোটির চতুর্ভুজস্থ সম্বিহিত পার্শ্বের অংশ সহিত সংযুক্ত হয় তবে সংযোজক রেখার সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কর্ণের সমচতুর্ভুজের পক্ষ গুণ হইবে ।

### ৫ পরিচ্ছেদ ।

৩৮। এক নির্দিষ্ট রেখাটো এমন বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেখান পর্য্যাপ্ত দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই সরল রেখা টানিলে সেই দুই রেখার সর্গোপকো অধিক অন্তর হইবে ।

৩৯। এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন তাহারদের আয়ত তাহারদের অন্তরের সম চতুর্ভুজ তুল্য হয় ।

৪০। ৭ মত দুই রেখা নির্দিষ্ট করিতে হইবে যে তাহারদের সম চতুর্ভুজের যোগ কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ তুল্য হয় এবং তাহারদের আয়ত কোন নির্দিষ্ট আয়ত তুল্য হয় ।

৪১। এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুই নির্দিষ্ট রেখা পর্য্যাপ্ত এক সরল রেখা নিরূপিত করিতে হইবে যেন তাহার দুই অংশের আয়ত এক নির্দিষ্ট আয়ত তুল্য হয় কিন্তু সেই নির্দিষ্ট আয়ত ঐ বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দুই রেখার কোনটির উপর পতিত লম্ব খণ্ডের আয়ত অপেক্ষা স্থান হইবে না ।



42. From a given point to draw a line cutting two given parallel lines, so that the difference of its segments may be equal to a given line, not less than the difference of the segments of the perpendicular from the point to the two lines.

43. From two given points to draw two lines to a point in a third line, so that the difference of their squares may be equal to a given square.

44. To divide a given triangle into any number of parts, having a given ratio to each other, by lines drawn parallel to one of the sides of the triangle.

45. To divide a given triangle into any number of equal parts, by lines drawn parallel to a given line.

46. Through a given point, between two straight lines containing a given angle, to draw a line which shall cut off a triangle equal to a given rectilineal figure; not less than the triangle between the given straight lines, and a base which is bisected in the given point. See Sec. III. 28.

## SECTION VI.

47. To describe a rectangular parallelogram which shall be equal to a given square, and have its adjacent sides together equal to a given line, not less than twice the side of the given square.

৪২। এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই নির্দিষ্ট সমানান্তরাল রেখায় সম্প্রতিত এক রেখা নিষ্কাশিত করিতে হইবে যেন তাহার খণ্ডান্তর নির্দিষ্ট রেখার সমান হয় সেই নির্দিষ্ট রেখা ঐ বিন্দু হইতে পতিত উক্ত দুই রেখার লম্বের খণ্ডান্তর অপেক্ষা স্থান হইবে না।

৪৩। দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে তৃতীয় রেখায় কোন বিন্দু পর্যন্ত দুই রেখা নিষ্কাশিত করিতে হইবে তাহারদের সম-চতুর্ভুজের অন্তর যেন কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ তুল্য হয়।

৪৪। নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোন এক বাহুর সমানান্তরাল কতিপয় রেখা দ্বারা ত্রিভুজ ক্ষেত্রকে কতিপয় অংশে বিভক্ত করিতে হইবে সেই সকল অংশের পরস্পর নিম্পত্তি যেন নির্দিষ্ট পরিমাণাভূয়া হয়।

৪৫। কোন নির্দিষ্ট রেখার সমানান্তরাল কতিপয় রেখার দ্বারা এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

৪৬। নির্দিষ্ট কোণোৎপাদক দুই সরল রেখার মধ্য-বর্ত্তি কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন এক রেখা নিষ্কাশিত করিতে হইবে যে তদ্বারা সরল ত্রৈখিক নির্দিষ্ট ক্ষেত্র তুল্য ত্রিভুজ ক্ষেত্র অবচ্ছিন্ন হয় কিন্তু ঐ ক্ষেত্র নির্দিষ্ট বিন্দুতে দীর্ঘাঙ্কিত এমন ভূম্যাপরিস্র অথচ নির্দিষ্ট সরল রেখার দ্ব্যবর্ত্তি ত্রিভুজ অপেক্ষা স্থান হইবেক না। ৩ পরিচ্ছেদে ২৮ অধ্যায় প্রক্ষেপে দৃষ্টি কর।

### ৬ পরিচ্ছেদ ।

৪৭। এমন এক সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাশিত রিতে হইবে বাহ্য এক নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয় ৭ বাহ্য দুই সংলগ্ন বাহু একত্র যোগে এক নির্দিষ্ট

48. To describe a rectangular parallelogram which shall be equal to a given square, and have the difference of its adjacent sides equal to a given line.

49. To describe a triangle which shall be equal to a given equilateral and equiangular pentagon, and of the same altitude.

50. To describe an equilateral triangle equal to a given isosceles triangle.

51. To describe a parallelogram, the area and perimeter of which shall be respectively equal to the area and perimeter of a given triangle.

52. To divide a circle into any number of concentric equal annuli.

53. To inscribe a square in a given semicircle.

54. To inscribe a square in a given segment of a circle.

55. Having given the distance of the centre of two equal circles which cut each other; to inscribe a square in the space included between the two circumferences.

56. In a given circle to inscribe a rectangular parallelogram equal to a given rectilincal figure.

57. In a given equilateral and equiangular pentagon to inscribe a square.

58. To inscribe a circle in a given quadrant.

59. To describe a circle, the circumference of

রেখার তুল্য হয় কিন্তু সেই রেখা নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের ভূজ পরিমাণের দ্বিগুণের স্থান হইবেক না ।

৪৮ । এমত এক সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাশিত করিতে হইবে যাহা এক নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয় এবং যাহার দুই সংলগ্ন বাহুর অন্তর এক নির্দিষ্ট রেখার তুল্য হয় ।

৪৯ । এমত এক ত্রিভুজ নিষ্কাশিত করিতে হইবে যাহা ত্রুলা উন্নত অথচ সমবাহক এবং সমকোণি পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের সমান হয় ।

৫০ । এক নির্দিষ্ট সমদ্বিবাহক ত্রিভুজের সমান এক সমবাহক ত্রিভুজ ক্ষেত্র নিষ্কাশিত করিতে হইবে ।

৫১ । এমত এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাশিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্র ফল এবং পরিমিতি ক্রমশঃ এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল এবং পরিমিতি তুল্য হয় ।

৫২ । এক বৃত্তকে কতিপয় সমকেন্দ্র সমান বৃত্তে বিভক্ত করিতে হইবে ।

৫৩ । এক নির্দিষ্ট অক্ষ বৃত্তে সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৫৪ । এক নির্দিষ্ট বৃত্তখণ্ডে সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৫৫ । পরস্পর অবচ্ছেদক এমত দুই সমান বৃত্তের কেন্দ্রের দূরতা নির্দ্ধারিত করিয়া তাহারদের পরিধির মধ্যবর্ত্তি স্থলে সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৫৬ । এক নির্দিষ্ট সরল ট্রেখিক ক্ষেত্রের সমান সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৫৭ । এক নির্দিষ্ট সমবাহক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৫৮ । এক নির্দিষ্ট বৃত্তপাদে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৫৯ । এমত এক বৃত্ত নিষ্কাশিত করিতে হইবে যাহার পরিধি

## SECTION VIII.

68. If on the chord of a quadrantal arc a semi-circle be described; the area of the lune so formed will be equal to the area of the triangle formed by the chord and terminating radii of the quadrant.

69. If from the extremities of the side of a square circles be described, the radius of one being equal to the side, and of the other to the diagonal of the square; the area of the lune so formed will be equal to the area of the square.

70. If, on the sides of a triangle inscribed in a semicircle, semicircles be described; the two lunes formed thereby will together be equal to the area of the triangle.

## SECTION IX.

71. Given one angle, a side adjacent to it, and the difference of the other two sides; to construct the triangle.

72. Given one angle, a side opposite to it, and the difference of the other two sides; to construct the triangle.

73. Given one angle, a side opposite to it, and the sum of the other two sides; to construct the triangle.

74. In a right-angled triangle, having given the sum of the base and hypotenuse, and the sum of the base and perpendicular; to construct the triangle.

## ৮ পরিচ্ছেদ ।

৬৮। বৃত্তপাদ সম্বলিত চাপের পূর্ণজ্যার উপর অর্দ্ধ বৃত্ত  
নিষ্কাশিত হইলে তাহাতে যে অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়  
তাহা ঐ পূর্ণজ্যা এবং বৃত্তপাদস্থ দুই প্রান্ত কর্ণটির সমাবর্তি  
ক্ষেত্র তুল্য হইবে ।

৬৯। কোন সমচতুর্ভুজের ভূজাগ্র হইতে দুই বৃত্ত নিষ্কা-  
সিত হইলে একটি যদি ভূজ পরিমাণে এবং অন্যটি কর্ণ পরি-  
মাণে অঙ্কিত হয় তবে তাহাতে যে অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র  
উৎপন্ন হইবে তাহা ঐ সমচতুর্ভুজ ক্ষেত্রের তুল্য ।

৭০। অর্দ্ধ বৃত্তান্তর্গত ত্রিভুজের ভূজোপরি যদি অর্দ্ধ  
বৃত্ত নিষ্কাশিত হয় তবে তাহাতে যে দুই অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র  
উৎপন্ন হইবে তাহা একত্র যোগে ঐ ত্রিভুজ ক্ষেত্রের তুল্য  
হইবে ।

## ৯ পরিচ্ছেদ ।

৭১। এক কোণ এবং তৎসংলগ্ন এক বাহু এবং অন্য দুই  
ভূজান্তর জাত আছে তাহাতে তৎ সম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত  
করিতে হইবে ।

৭২। এক কোণ এবং সম্মুখস্থ বাহু এবং অন্য দুই ভূজান্তর  
জাত আছে তাহাতে তৎ সম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে  
হইবে ।

৭৩। এক কোণ এবং তৎসম্মুখস্থ বাহু এবং অন্য দুই  
ভূজের যুতি জাত আছে তাহাতে তৎ সম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত  
করিতে হইবে ।

৭৪। সকলোনি ত্রিভুজে কর্ণ এবং ভূজের যতি জাত আছে  
তাহাতে তৎ সম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

75. Given one angle of a triangle, and the sums of each of the sides containing it and the third side; to construct the triangle.

76. The area and hypotenuse of a right-angled triangle being given; to construct the triangle.

•• In the foregoing problems the distribution into *sections* is given according to Bland in order to enable the learner to make references with facility; but the problems are numbered differently here.

৭৫। কোন ত্রিভুজের এক কোণ এবং তৎসংলগ্ন প্রত্যেক বাহুর এবং তৃতীয় বাহুর মূর্তি জ্ঞাত আছে তাহাতে ঐ ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৭৬। সমকোণি ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল এবং কর্ণ জ্ঞাত আছে তাহাতে ঐ ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

\*.\* বাণ্ড নামক গ্রন্থকারের মতামুসারে উপরি লিখিত প্রশ্ন সকলের পরিচ্ছেদ ভেদ করা গেল ইহার বিশেষ তাৎ-পর্য্য এই যে পাঠকবর্গ অনায়াসে ঐ গ্রন্থে তাহার উদ্দেশ্য প্রাপ্ত হইতে সক্ষম হইবেন পরন্তু এস্থলে প্রশ্ন সকলের লুপ্তকং সংখ্যা দত্ত হইল।





## QUESTIONS FROM THE LILAVATI.

The following questions are appended, not because they form a good sequel for their own merit to the preceding problems from Bland, but because, being extracted from a popular text-book in Sanscrit of practical Geometry, they have a sort of classical authority in the estimation of the Hindus. The *Lilavati* is the source whence Hindu mathematicians generally derive their geometrical knowledge; and, as the following list contains all the points treated in that work on the subject of *Plane Figure*, the learner may take some interest in answering the queries.

The ancient Brahmins never made any considerable progress in the study of Geometry. Their speculations in Algebra were of a higher order. Euclid's method of *rigidly* demonstrating every truth that is propounded was not known to the Brahmins, or at least was wholly disregarded by them. That they were acquainted with many properties of rectangles, rectangular triangles, and circles, the following questions prove beyond a doubt. The original inventors of the science must have satisfied themselves in some way of the truth of the propositions they believed and taught. But

## নীলাবতীর পুশু।

দ্বাদশ নামক গ্রন্থকার প্রণীত পুৰ্ব্বোক্ত গ্রন্থ সকলের উল্লে-  
খানন্তর নিম্ন লিখিত গ্রন্থ যদিও এখানে উদ্ধৃত করিবার  
উপযুক্ত নহে তথাপি ভারতবর্ষীয় জনগণ ক্ষেত্র ব্যবহার সম্ব-  
ন্ধীয় প্রসিদ্ধ সংস্কৃত গ্রন্থোদ্ধৃত বলিয়া প্রাচীন বেদে এই  
সকল গ্রন্থের মহা গৌরব করিয়া থাকেন একারণ তাহার  
বিস্তার করা গেল ফলতঃ ভারতবর্ষীয় গণিত বেত্তারদের পক্ষে  
এমানাতঃ নীলাবতীই ক্ষেত্র ব্যবহার বিষয়ক বিদ্যার মূল  
পদিকল্প এই গ্রন্থের মধ্যে ক্ষেত্র সম্বন্ধে যে২ সূত্র আছে নিম্ন  
লিখিত গ্রন্থ সমুদায়ই সে সকলের বিষয় অতএব এই সকল  
গ্রন্থের উক্তর লিখনে কিঞ্চিৎ আমোদ জন্মিবার সম্ভাবনা।

ভারতবর্ষীয় পুৰ্ব্বতন পণ্ডিতেরা ক্ষেত্রতত্ত্বে অধিক ব্যুৎপন্ন  
ছিলেন না বাক্য গণিত বিদ্যাতে তাঁহারদের উত্তম ব্যুৎপত্তি  
ছিল। ইউক্লিড নামা গ্রীক গণিত বেত্তা যে২ প্রতিজ্ঞার  
উদ্দেশ্য করিতেন সকলি দৃঢ়তর বুক্তি দ্বারা উপপন্ন করিতেন  
কিন্তু বোধ হয় ভারতবর্ষীয় পণ্ডিতেরা এই সূধারা  
স্ববগত ছিলেন না অথবা অগ্রাহ্য করিয়াছিলেন। তাঁহারা  
বৃত্ত আয়ত জাত্য ত্রিভুজ প্রভৃতি ক্ষেত্র গণনায় যে পার-  
দর্শি ছিলেন নিম্ন লিখিত গ্রন্থ পাঠে তাহা নিঃসন্দেহ  
রূপে বোধগম্য হইবে অপর ক্ষেত্র বিদ্যার আদ্য সৃষ্টি  
কারকেরা যে২ প্রতিজ্ঞা সত্য বলিয়া গ্রহণ পূর্বক শিষ্য-

it does not appear that, when communicating them to their disciples, they revealed the grounds of their belief, in any way similar to Euclid's. The doctrines were inculcated, and received as established truths, on the authority of the tutors; and, as they stood the test of experience, no other demonstrations were sought. It may be doubted whether any Brahmin, unenlightened by foreign instruction, and unacquainted with the Sanscrit translation of Euclid, executed in the days of Jaya Singha, not more than 200 years ago, can *mathematically* demonstrate the truths, involved in the problems which he is able mechanically to solve.

The questions numbered 31 and 33 cannot be geometrically solved. The problem of inscribing a heptagon or a nonagon in a circle is identical with that which was celebrated among Greek geometers as the problem of the trisection of the angle.

If treated algebraically, it leads to a cubic equation with three real roots, the arithmetical value of which can be found only approximately.

The author of the Lilavati has given no account of the way in which he got the numbers stated by him; if they had been obtained by solution of the above-mentioned equation, they would probably have been more accurate than they are. He only lays down an arbitrary rule

গণকে উপদেশ করিতেন তাহার প্রমাণ অবশ্য কোন প্রকারে আপনারদের স্মরণ করিয়া থাকিবেন কিন্তু তাঁহার শিষ্য গণকে উপদেশ করণ কালে ইউক্লিডের ন্যায় দৃঢ়তর যুক্তি দর্শাইয়া সে প্রমাণ যে ব্যক্ত করিয়াছিলেন এমত বোধ হয় না। ফলতঃ গুরুর কথা প্রমাণ তাঁহারদের প্রণীত সূত্র সকলের শিক্ষা হইত এবং শিষ্যেরাও তাহা আপ্ত বাক্য বলিয়া স্বীকার করিতেন আর পরীক্ষা কালীন তাহাতে কোন ব্যভিচার দৃষ্ট হইত না। সুতরাং অন্য কোন উপপত্তির আকাঙ্ক্ষাও ছিল না। যেহেতু পাণ্ডিত্যের বিদেশীয় বিদ্যায় উপদেশ প্রাপ্ত হয়েন নাই অথবা রাজা জয় সিংহের কালে অর্থাৎ অতীত দুই শত বৎসরের মধ্যে বিবর্তিত রেখা গণিত নামক ইউক্লিডের সংস্কৃত অমূল্য উপদেশ দৃষ্টি করেন নাই তাঁহারদের মধ্যে বোধ হয় এক জনও এমত পারদর্শী নহেন যে গুরুপদার্থ সূত্রানুসারে যেহেতু প্রশ্নের দ্বারা লিখিতে সক্ষম গণিত শাস্ত্রের ধারায় তাহা উপগম্য করিতে পারেন।

৩১ এবং ৩৩ সংখ্যক প্রশ্নে যে বিষয় সম্পন্ন করিবার অমূল্য উপদেশ আছে তাহা ক্ষেত্র দ্বারা সিদ্ধ করা অসাধ্য। সমস্ত ভূজ অথবা নবভূজ ক্ষেত্র বৃত্তান্তগত করণের প্রশ্ন গ্রীক জাতীয় ক্ষেত্র বেত্তারা যাহাকে কোণ ত্রিখণ্ড করণের প্রশ্ন কহিতেন তাহা হইতে ভিন্ন নহে।

বীজ গণিতের ধারাতে সিদ্ধান্ত করিলে ঐ প্রশ্নে এক ঘন সনিকরণ উপস্থিত হয় তাহার সম্ভাব্য মূল ত্রিবিধ কিন্তু অক্লান্ত পরিশ্রমে সেই মূল যথার্থরূপে সিদ্ধ হয় না কেবল অতি সূক্ষ্মরূপে শুদ্ধ সম্মিহিত হইতে পারে।

লীলাবতীর ঐহিকার উক্ত ক্ষেত্রের ভূজ পরিমাপার্থ যেহেতু সংখ্যার উদ্দেশ্য করিয়াছেন তাহা কিরূপে লক্ষ্য হয় সে ধারার বিবরণ লেখেন নাই। উক্ত সনিকরণের সিদ্ধান্ত দ্বারা তাহা প্রাপ্ত হইলে বোধ হয় আরও সূক্ষ্মরূপে যথার্থ পরিমাণ অনুযায়ী হই-

that the side of the heptagon is  $\frac{1}{2} \frac{100000}{100000}$  of the diameter and that of the nonagon  $\frac{1}{3} \frac{100000}{100000}$  of the same. Neither of these is very far from the truth. The accurate value of the side of the heptagon lies between  $\frac{1}{2} \frac{100}{100}$  and  $\frac{1}{3} \frac{100}{100}$ . The side of the nonagon lies between  $\frac{1}{3} \frac{100}{100}$  and  $\frac{1}{4} \frac{100}{100}$ .

Among the commentators on the Lilavati, Rama Krishna, Gangadhara, Ranganatha, have not attempted any demonstration of the problems in question, and have contented themselves with merely repeating the figures contained in the text. Ganesa confesses that the proof of the sides of the regular pentagon, heptagon, and nonagon cannot be shown in a manner similar to that of the triangle, square, and octagon. That is untrue of the pentagon: its side can be geometrically found, as shewn in this treatise B IV Prop. 11; and the admission of Ganesa serves only to prove that he was unacquainted with the Sanscrit translation of Euclid, which contains a solution of this problem. Ganesa cannot mean only that the side of the pentagon is incommensurable with the diameter: for, that is equally true of the triangle, square, and octagon, inscribed in a circle. Suryadasa bolder than Ganesa and the other commentators, will have no other result than shewing more conspicuously his ignorance of the real nature of the problem. "For the heptagon" says he "describe a circle as before, and within it an equilateral heptagon; then a line being

তে পারিত। তিনি কেবল স্বৈচ্ছানুসারে এক সূত্র রচনা করিয়া

কহেন যে সপ্তভুজ ক্ষেত্রের বাহুপরিমাণ ব্যাসের  $\frac{৫২০৫৫}{১২০০০০}$  গুণ

এবং নবভুজের বাহু পরিমাণ  $\frac{৪১০৩১}{১০০০০০}$  গুণ। এপরিমাণ নিতান্ত

অসত্য নহে কেননা সপ্তভুজের যথার্থ ভুজ পরিমাণ  $\frac{৮২}{১৮২}$

এবং  $\frac{১০৫}{১৪২}$  মধ্যে নিশ্চিত, এবং নবভুজের ভুজ পরিমাণ  $\frac{১৩}{১৮}$

এবং  $\frac{১০৫}{৩০৭}$  মধ্যে নির্ণীত হইয়াছে।

নীলাবতীর টীকাকারের মধ্যে রামকৃষ্ণ গঙ্গাধর রক্ষনাথ উক্ত প্রশ্নের উপপত্তি করিতে চেষ্টাও করেন নাই তাঁহারা কেবল গ্রন্থকারের সঙ্গিত অঙ্কের পুনরুক্তি করিয়াছেন, গণেশ স্পষ্টই স্বীকার করিয়াছেন যে সমবাহু ত্রিভুজ চতুভুজ এবং অষ্টভুজের ন্যায় পঞ্চভুজ সপ্তভুজ এবং নবভুজের ভুজ পরিমাণ স্পষ্টরূপে উপপন্ন হয় না। পঞ্চভুজের বিষয়ে একপ্রকার স্বীকার করা কর্তব্য নহে কেননা পঞ্চভুজের বাহু কেহদ্বারা নির্ণীত করা যায় যথা এই পুস্তকের ৯ অধ্যায়ের ১১ প্রতিজ্ঞাতে উপপন্ন হইয়াছে সুতরাং গণেশের স্বীকৃত কথায় কেবল এই বোধ হয় যে ইউক্লিডের সংস্কৃত অনুবাদ অর্থাৎ রেখা গণিত যাহাতে ঐ প্রশ্নের সিদ্ধান্ত হইয়াছে তাহা তিনি জানিতেন না। বোধ হয় তাঁহার এই মাত্র অভিপ্রায় না হইবে যে পঞ্চভুজের বাহু ব্যাসের যথার্থ পরিমেষ নহে কেননা তাহা ত্রিভুজ চতুভুজ এবং অষ্টভুজের বিষয়েও কথা যাইতে পারে। সূর্যাসাদাস গণেশ প্রভৃতি অন্যান্য টীকাকারের অপেক্ষা অধিক সাহসিক হইয়া রচনা করিয়াছেন কিন্তু উপস্থিত বিষয়ে তাঁহার অনভিজ্ঞতা আরও স্পষ্টরূপে প্রকাশ পাইতেছে তিনি কহেন সপ্তভুজের প্রমাণার্থ “পূর্ববৎ বস্তু নিষ্কাশিত করিয়া গরে সমবাহক

drawn between the extremities of any two sides at pleasure and three lines from the centre of the circle to the angles indicated by those extremities, an unequal quadrilateral is formed. The greater sides, and the least diagonal thereof are equal to the semi-diameter. The value of the greater diagonal, which is assumed arbitrarily, is the chord of the arc encompassing the two sides. Its arrow being deduced in the manner before directed, is the side of a small rectangular triangle. Thus the greater diagonal, being here arbitrarily assumed to be 43864, is the chord sought; its arrow found in the manner directed is 22579; this is the side, and half the base or chord is the upright 46902; their squares are 569711241 and 21997604, the square root of the sum of which is the side of the heptagon or 52056.\*

For the nonagon, he says; "A circle being described as before, inscribe a triangle in it. Thus the circle is divided into three parts. Three equal chords being drawn in each of those portions, a nonagon is thus inscribed in the circle: and three oblongs are formed within the same; of which the base is equal to the side of the (inscribed) triangle. Two perpendiculars being drawn in the oblong, it is divided into three por-

---

\* These numbers are given from the copy of Suryadasa's commentary on the Lilavati in the library of the Asiatic Society. There are two obvious errors in them, probably of the copyist; viz. 22579 should be 22581 and 21997604 should be 2199797604.

সপ্তভুজ ক্ষেত্র তদন্তগত কর। স্বেচ্ছামুসারে দুই ভুজাংশ রেখা দ্বারা সমুদ্র করিয়া কেন্দ্র হইতে ঐ ভুজাংশ চিত্রিত কোন পম্যাস্ত তিন রেখা নির্ধারিত হইলে তাহাতে এক বিষম চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইবে তাহার বৃহত্তর দুই বাহু এবং ক্ষুদ্রতর কর্ণ ব্যাসার্দ্ধ তুল্য। অপর স্বেচ্ছামুসারে কল্পিত বৃহত্তর কর্ণের যে পরিমাণ তাহা ঐ দুই ভুজ ব্যাপন চাপের পূর্ণজ্যা। আর পূনোক্ত স্বেচ্ছামুসারে শর নির্ণয় করিলে তাহা এক সমান ত্রিভুজের ভূত তুল্য, যথা বৃহত্তর কর্ণ পরিমাণ স্বেচ্ছামুসারে ৯৩-০২ ক্রান্ত, ইহাই অন্তরে ইন্টজা, পূর্ণোক্ত প্রদায় তাহার শর ২২৫৭৯, ইহাই ভুজ, এবং জীবা স্বরূপ ক্ষুদ্র কর্ণ কোটি ৪৬৯০২, ইহারদের বর্গ ৫০৯৭১১২৪১ যে ২১৯৯৭৬০৪ তাহারদের যোগ মূল সপ্তভুজের বাহু ১০০৫।

নিম্নলিখভুজের বিষয়ে কহেন “পূর্ববৎ বৃত্ত নির্ধারিত হইলে সমতুল্য এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কর তাহাতে বৃত্ত পরিধি তিন সমান অংশে বিভক্ত হইবে এবং প্রত্যেক অংশে তিন সমান ২০০৫ জ্যা নির্ধারিত হইলে নবভুজ ক্ষেত্র বৃত্তান্তগত হইবে ও সমান্য তিন চতুর্ভুজ ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে তাহার দুই বৃত্তান্তগত ত্রিভুজের ভূত তুল্য। অপর ঐ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের কোন দীর্ঘ দুই লম্বপাত হইলে তাহা অংশদ্বয়ে বিভক্ত হইবে প্রথম এবং শেষাংশ দুই ত্রিভুজ ও মধ্যাংশ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র হইবে

---

\* কলিকাতার এম্যাটিক সোসাইটির পুস্তকালয়ে যে প্রকাশিত রচিত লীলাবতীর টীকা আছে তাহা হইতে উক্ত অঙ্ক অবিকল উদ্ধৃত করা গেল কিন্তু ইহার মধ্যে দুই স্পষ্ট অশুদ্ধি আছে বোধ হয় তাহার লেখকের জন বশতঃ হই-  
গাছে অর্থাৎ ২২৫৭৯ পরিবর্তে ২২৫৮১ হইবে এবং ২১৯৯৭৬০৪ পরিবর্তে ২১৯৯৭৯৭৬০৪ হইবে।



tions, the first and last of which are triangles; and the intermediate one is a tetragon. The base in each of them is a third part of the side of the inscribed triangle (!) It is the upright (of a rectangular triangle); the perpendicular is its side; and the square root of the sum of their squares is hypotenuse, and is the side of the nonagon. To find the perpendicular, put an assumed chord equal to half the chord of the (inscribed) tetragon: find its arrow in the manner aforesaid; and subtract that from the arrow of the chord of the (inscribed) triangle, the remainder is the perpendicular. Thus the perpendicular comes out 21989: it is the side (of a rectangular triangle). The third part of the inscribed triangle is 34641: it is the upright. The square root of the sum of their squares is 41031: and is the side of the inscribed nonagon. Thus all is congruous." It will not be necessary to explain to those who have carefully studied the foregoing treatise, the false and inconclusive character of this sort of reasoning.

With reference to the quadrature of the circle, the Hindus seem to have made considerable improvement between the age of Brahmagupta and that of the *Lilavati*. Brahmagupta gave three times the diameter as the practical circumference, the neat dimension of which, according to him, was the square root of ten times the square of the diameter.\*. The author of the *Lilavati* allows a larger proportion for the gross circum-

---

\*That is as 3.1623 to 1, which is too great by more than 1 part of the whole.

দপের সকলেরি ভূমি (বৃত্তান্তগত) ত্রিভুজের বাহুর তৃতীয়াংশ হইবে(১) তাহাই জাত্য ত্রিভুজের কোটি এবং উক্ত লম্ব তাহার ভুজ সূত্রাং এই ভুজ কোটির বর্গযোগের মূল কর্ণ তাহাই নবভুজের ভুজ। অপিত লম্ব জ্ঞাপনার্থ অন্তর্গত চতু-  
ভুজের পূর্ণজ্যার অর্দ্ধ পরিমাণে এক জ্যা স্বেচ্ছামূল্যারে কল্পনা করিয়া পূর্ক ধারামূল্যারে তাহার শর নিশ্চয় কর এবং সেই শর অন্তর্গত ত্রিভুজের পূর্ণ জ্যার শর হইতে ব্যবকলন কর তাহাতে অবশিষ্ট দ্ব্যধিকবেক তাহাই লম্ব পরিমাণ হইবেক যথা  
লম্ব পরিমাণ ২১৯৮৯, ত হা (এক জাত্য ত্রিভুজের) ভুজ, এবং  
অন্তর্গত ত্রিভুজের বাহুর তৃতীয়াংশ ৩৪৬৩১, তাহাই কোটি  
তাহারদের বর্গ যোগের মূল ৪১০৩১ তাহাই অন্তর্গত নবভু-  
জের বাহুর পরিমাণ। অতএব এ নকলি যুক্তি সিদ্ধ।" এই  
একর তর্ক যে অসীক এবং হেতুভাসে পরিপূর্ণ তাহা  
বাহারা পূর্বোক্ত রচনা সকল যত্ন পূর্বক অধ্যয়ন করিয়াছেন  
তাহারদের নিকট বিস্তারিত করা নিষ্প্রয়োজন।

ব্রহ্মগুপ্ত এবং জীলাবতীর মধ্যে যে কাল অতীত হইয়া-  
ছিল বোধ হয় তন্মধ্যে ভারতবর্ষীয় পণ্ডিতেরদের বৃত্ত ফল  
নির্ণয় এসঙ্গে বিজ্ঞাতীয় বিদ্যা বৃদ্ধি হইয়াছিল। ব্রহ্মগুপ্ত  
কহিয়াছিলেন যে স্থূল গণনায় পরিধি ব্যাসের ত্রিগুণ এবং  
ভূজ পরিমাণে ব্যাসের বর্গের দশগুণের বর্গমূল তুল্য \*।  
কিন্তু জীলাবতী রচক পরিধির স্থূল পরিমাণ তদপেক্ষা অধিক  
কহেন অর্থাৎ ২২ যথা ৭ সম্বন্ধে, এবং স্থূল গণনায় সত্য

\* অর্থাৎ ৩.১৬২৩ যথা ১ সম্বন্ধে, ইহা ঠিক পরিমাণে  
উক্ততার অতিরিক্ত।

ference, viz. as 22 to 7; but makes a much nearer approximation in his neat estimate, which is  $\frac{17}{11}$  of the diameter."\*

The questions contained in the Lilavati are substantially the same as those contained in Brahmagupta's chapter on Plane Figure. They will serve as a good index of the amount of geometrical knowledge which may be called indigenous. It is on this account that it has been thought best to give the questions nearly in the original words, instead of stating them more concisely.

We shall quote one of the rules, and the solution of one of the questions from the Lilavati, in order to show how the Brahmins work problems on practical geometry, the rules for which are almost invariably delivered in verse.

"The rule for determining the base, perpendicular or hypotenuse, when any two of them are known, is given in two stanzas. One of the sides is assumed, (as the base). That which goes in a rival direction to it is, by persons acquainted with the science, called the *koti* or perpendicular, whether it be in a (rectangular triangle or quadrilateral.

---

\* Ganesa says that this value was probably deduced by six successive bisections of the arc subtended by the side of an equilateral hexagon, and that it represents the periphery of a polygon of 864 sides. That periphery may be otherwise represented as 3.1416 to 1 and is very near the truth. A still more accurate proportion is  $\frac{17}{11}$ . The method of deducing this result is taught in treatises on Trigonometry.

নির্ণয়ের আরো অধিক নিকটস্থ হইয়াছেন অর্থাৎ পরিধি পরিমাণ তাঁহার গণনায় ব্যাসের  $\frac{৩৯২৭}{১২৫০}$  গুণ \* )

লীলাবতীতে ক্ষেত্র ব্যবহার বিষয়ক যে উদাহরণ আছে সে সকল সামান্যতঃ ব্রহ্ম গুপ্ত প্রণীত ক্ষেত্র ব্যবহারের প্রশ্ন তুল্য। অতএব ভারতবর্ষীয় লোকেরা ক্ষেত্রব্যবহার সম্বন্ধে স্বয়ং কতদূর পর্য্যন্ত বিদ্যানুশীলন করিয়াছিলেন লীলাবতীর এই সকল উদাহরণেই তাহা প্রকাশ হইবে সেই কারণে আমরা তাহা অবিকল অনুবাদ করিলাম নচেৎ আরও সংক্ষেপে লেখা যাইতে পারিত।

ভারতবর্ষীয় পণ্ডিতেরা কিরূপে ক্ষেত্র ব্যবহারের প্রশ্ন সাধন করেন তাহা বিজ্ঞাপন করিবার নিমিত্ত আমরা এস্থলে লীলাবতীর একটি সূত্র এবং প্রশ্ন সাধনের ধারা উদ্ধৃত করিতেছি। মূলগ্রন্থে এই সকল সূত্র ছন্দেতে রচিত হইয়াছে।

“ভুজ কোটি কর্ণের কোন দুইটী জ্যাত হইলে তৃতীয় নির্ণয় করণের সূত্র দুই বৃত্ত। সমকোণি ত্রিভুজেই হটক অথবা চতুর্ভুজে হটক এক বাহুকে ভুজ অর্থাৎ ভূমি বলিয়া কল্পনা করিলে অপর দিকস্থ বাহুকে গণিত শাস্ত্রজ পণ্ডিতেরা কোটি অর্থাৎ লম্ব কহেন। ভুজ কোটির বর্গযোগের মূল কর্ণ।

\* গণেশ নামক টীকাকার কহেন যে বোধ হয় সমবাহক বড়ভূজের বাহু ব্যাপক চাপকে ক্রমশঃ ছয়বার বিখণ্ড করাতে এই পরিমাণ লব্ধ হইয়াছে এবং এই সংখ্যাই ৩৮৪ ভুজ বিশিষ্ট ক্ষেত্রের পরিমিত্তির পরিমাণ তাহা প্রকারান্তরে এইরূপ লেখা। যাইতে পারে ৩.১৪১৬ যথা ১ সম্বন্ধে, ইহা অতিশয় শুদ্ধ সঙ্গীত বটে কিন্তু  $\frac{৩৫৫}{১১৩}$  কহিলে তদপেক্ষা আরো শুদ্ধ হয় ত্রিকোণ গণিত শাস্ত্রের রীত্যনুসারে ইহার উপপত্তি হইতে পারে।

"The square root of the sum of their squares is the hypotenuse. The square root of the difference of the squares of the base and hypotenuse is the perpendicular. The square root of the difference of the squares of the hypotenuse and perpendicular is the base.

Example.

Statement:



Perpendicular 4. Base

3. The square of the base  
9. The square of the perpendicular 16. Their sum  
25. The square root of this  
is 5. The hypotenuse  
is found."

In some instances commentators have supplied demonstrations, but they would appear extremely rude to the student of Euclid.

### QUESTIONS.

1. Say what will be the dimension of the hypotenuse of a right angled triangle whose perpendicular is 4 and the base 3?
2. The hypotenuse being 5 and the base 3, say how much will be the perpendicular?
3. The hypotenuse being 5 and the perpendicular 4, say what will be the base?
4. Mention a few cases of a right angled triangle having 12 for the base and rational numbers for its perpendicular and hypotenuse.

ভুজ কর্ণের বর্গান্তরের মূল কোটি। কোটি কর্ণের বর্গান্তরের মূল ভুজ।

উদাহরণ।

মাস



কোটি ৪। ভুজ ৩। ভুজবর্গ ৯  
কোটিবর্গ ১৬। তাহারদের  
যোগ ২৫। ইহার মূল ৫।  
কর্ণ নির্ণীত হইল।”

কোন২ স্থলে টীকাকারেয়া স্থানের উপপত্তি যোগ করিয়া-  
ছেন কিন্তু যাঁহারা ইউক্লিড অধ্যয়ন করিয়াছেন তাঁহাদের  
বোধে সে উপপত্তি অতি উপেক্ষণীয়।

### প্রশ্ন।

১। কোন সমকোণি ত্রিভুজের ভুজ পরিমাণ ৩ এবং  
কোটি ৪ তাহার কর্ণ পরিমাণ কত হইবে।

২। কর্ণ পরিমাণ ৫ এবং ভুজ পরিমাণ ৩ হইলে কোটি  
কত হইবে।

৩। কর্ণ পরিমাণ ৫ এবং কোটি পরিমাণ ৩ হইলে ভুজ  
পরিমাণ কত হইবে।

৪। ভুজ পরিমাণ ১২ হইলে কর্ণ এবং কোটি অকরণ  
হয় এমন কএক সমকোণি ত্রিভুজ নির্দেশ কর।

5. Mention a few cases of a right angled triangle having 85 for the hypotenuse and rational numbers for the perpendicular and base.

6. Mention a few cases of right angled triangles having the base, perpendicular, and hypotenuse represented by rational numbers.

7. A Bambu tree measuring 32 cubits in height and standing upon level ground, was broken in one place by a storm; the broken part instantly inclined towards the ground which its extremity reached at a distance of 16 cubits from the foot of the tree, say mathematician, at how many cubits from the root was the tree broken?

8. A peacock perched on the top of a pillar 9 cubits in height. At the foot of the pillar was a snake's hole, and at a distance equal to three times its height was seen a snake. Seeing the snake glide toward the hole, the peacock pounced upon it at a place which was equidistant between the top of the pillar and the place where the snake was first seen. Say quickly at how many cubits from the snake's hole did they meet.

9. In a certain lake where cranes and *chuckwas* were desporting, there was a stalk of the lotus which rising from the bottom of the pool stood erect to the height of half a cubit above the level of the water. The lotus gradually inclined by the gentle action of the breeze, and was submerged at the distance of two cubits. Say quickly, mathematician, what was the depth of the water?

১০। এক শত হস্ত উচ্চ এমন কোন বৃক্ষাপরি ছই বানর উপবিষ্ট ছিল এবং সেই বৃক্ষ মূলের ছই শত হস্ত দূরে এক জলাশয় ছিল। এক বানর অনতিবেগে বৃক্ষ হইতে অবরোহণ করিয়া জলাশয় সমীপে গমন করিল অন্য বানর বৃক্ষের উপর আরো কিয়দূর পর্য্যন্ত লক্ষ্য দিয়া উঠিয়া কর্ণ পাথে ঐ জলাশয়ে উদ্ভীয়মান হইল কিন্তু উভয়েই সমান পথ গমন করিয়াছিল হে বিদ্বন্ যদি গণিত বিদ্যা যত্ন পূর্বক অধ্যয়ন করিয়া থাক তবে শীঘ্র কহ দেখি বানর বৃক্ষের উপর কত দূর পর্য্যন্ত লক্ষ্য দিয়াছিল। \*

১১। কোন সমকোণি ত্রিভুজে কর্ণ পরিমাণ ১৭ এবং ভূজ কোটির মূতি ২২, হে সম্মে ঐ ক্ষেত্রে ভূজ কোটির পৃথক পরিমাণ কত তাহা কহ।

১২। কোন সমকোণি ত্রিভুজে ভূজ কোটির অন্তর ৭ এবং কর্ণ পরিমাণ ১৩ তাহাতে ভূজ কোটির পৃথক পরিমাণ কহ।

১৩। ছই বংশ পরস্পর ৫ হস্ত পরিমাণে দূরত্ব আছে একটা ১৫ হস্ত উচ্চ অন্যটা ১০ হস্ত উচ্চ উভয়ের অগ্র মূত্র দ্বারা পরস্পরের মূলের সহিত সংযুক্ত হইলে যে স্থলে ছই মূত্রের সম্পাত হইবে তাহার উন্নতি কত তাহা কহ।

\* ভাস্করাচার্য্য আপন কালের ভারতবর্ষীয় কপির যে অদ্ভুত চরিত কল্পনা করিয়াছেন তাহা প্রত্যক্ষ দৃষ্ট পদার্থ বিষয়ক নিয়মের বিপরীত। ব্রহ্ম গুপ্ত অথবা তাঁহার টীকাকার ঐ উদাহরণ প্রকারান্তরে লিখিয়াছেন তিনি বৃক্ষের পরিবর্তে পর্বত, হ্রদের পরিবর্তে নগর, এবং ছই কপির পরিবর্তে ছই সম্মানির কল্পনা করিয়াছেন কিন্তু লক্ষকারি সম্মানিকে দায়াবী বলিয়া অদ্ভুত লক্ষনের হেতু নির্দেশ করেন।



14. Show that it will be the impossible to construct the two following figures : A quadrilateral with 12 for its base, 3 for the side opposite to the base, and 2 and 6 its two adjacent sides. A triangle with 3, 6, 9 for its three sides respectively.

15. There is a triangle whose base is 14 cubits, and its two sides 13 and 15 respectively. Say quickly what its altitude and area are, as also the length of the two segments into which the base is divided by the altitude.

16. In an obtuse angled triangle the base which is adjacent to the obtuse angle is 9 cubits and the two sides respectively 10 and 17. Tell me quickly, experienced mathematician, what its altitude and area are, as also the distance of the perpendicular from the obtuse angle.

17. In a quadrilateral figure whose base and its opposite side are parallel and are respectively 14 and 9 cubits, the other two sides being 13 and 12, and the altitude being also 12; tell the area as it was taught by the ancients.

18. If the side of a rhombus be 25 cubits and one of its diagonals 30, what will be the length of the other diagonal? and what will be the diagonal of a square whose side is 25?

19. What will be the area of a rectangle two of whose adjacent sides are respectively 8 and 6.

20. In an equi-perpendicular quadrilateral figure, the base is 22 cubits, its opposite side 11 cubits, the two adjacent sides are respectively 20 and 13 and the altitude 12; say what is the area of the figure.

৫। কর্ণ পরিমাণ ৮৫ হইলে ভুজ কোটি অকরণী হয়  
এবং কতিপয় সমকোণি ত্রিভুজ নির্দেশ কর।

৬। ভুজ কোটি এবং কর্ণ অকরণী হয় এমত কতিপয়  
সমকোণি ত্রিভুজ নির্দেশ কর।

৭। ৩২ হস্ত উচ্চ একটা বংশ সম ভূমিস্থ আছে বায়ুর  
বেগে অকস্মাৎ কোন স্থলে ভগ্ন হওয়াতে ভগ্নাংশ নত হইয়া  
পড়িয়া বংশ মূলের ১৬ হস্ত দূরে ভূমি সংলগ্ন হইল হে  
গণক বল দেখি মূল হইতে কত হস্ত উচ্চে ঐ বক্ষ ভগ্ন  
হইয়াছিল।

৮। ৯ হস্ত উচ্চ এক স্তম্ভোপরি এক ময়ূর উপবিষ্ট ছিল  
এবং সেই স্তম্ভতলে এক সর্পের গর্ত ছিল এবং তথা হইতে  
স্তম্ভের ত্রিগুণ পরিমাণ দূরে এক সর্প দৃষ্ট হইল। ময়ূর সর্পকে  
গর্তে বাইতে দেখিয়া তাহার উপর আসিয়া পড়িল যে স্থানে  
ময়ূর পতিত হইল তাহা স্তম্ভাগ্র এবং প্রথমতঃ সর্প দৃষ্ট হইবার  
স্থল হইতে সমদূর। এস্থলে গর্ত হইতে কতিপয় হস্ত দূরে সর্প  
ময়ূরের সম্পাত হইল তাহা শীঘ্র কহ।

৯। যাহাতে বক এবং চক্রবাক জল ক্রীড়া করিতেছে এমত  
কোন হ্রদে এক কমল কলিকা হ্রদের তল হইতে উঠিয়া  
জলের উপর বিতস্তি পরিমাণ উন্নত ছিল পরে বায়ুর নক্ষত্র  
গতিতে ক্রমশ নত হইয়া দুই হস্ত দূরে গিয়া জল মগ্ন হইল।  
হে গণক ঐ জল কত গভীর ছিল তাহার পরিমাণ শীঘ্র কহ

10. Two monkeys were sitting on the top of a tree 100 cubits high, and at the distance of 200 cubits from the foot of the tree, there was a pool of water. One of the monkeys gently descended from the tree and went directly to the pool; the other vaulted to some height perpendicularly from the top of the tree, and from thence leaped diagonally to the pool. Both monkeys went over the same space in these several ways. Tell me quickly learned man the height of the leap above the tree, if you have diligently studied mathematics!\*

11. In a right angled triangle the hypotenuse is 17 and the sum of the base and perpendicular 23, tell me my friend how much the base and perpendicular are?

12. In a right angled triangle the difference between the base and perpendicular is 7 and the hypotenuse 13. Can you tell me how much the base and perpendicular are?

13. Two Bambus, one 15 cubits in height, the other 10 cubits, are at a distance of 5 cubits from one another. The foot of the one being mutually joined by a string with the top of the other, say what will be the altitude of the point where the two strings will cross each other.

---

\* Bhaskararharya supposes the Indian monkey of his time to have been capable of performing feats which are inconsistent with the laws of mechanics as we now find them. Brahmagupta or (rather his commentator) had given the same example in another form. A hill stood for the tree—a town for the lake and two hermits for the two monkeys.—In that case, however, the extraordinary leap was explained by supposing the leaper to be a wizard.

১১। এক বিষম চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি পরিমাণ ৭৫ হস্ত, তৎসমুখস্থ ভুজ পরিমাণ ৫১, এবং দুই পার্শ্ব পরিমাণ ক্রমশঃ ৪১ এবং ৬৮ নির্দিষ্ট আছে এবং ভূমির পার্শ্বস্থ লম্ব ৪০ হস্ত তাহার ক্ষেত্র ফল এবং দুই কর্ণের পরিমাণ তথা অপর শূন্য হইতে পতিত লম্ব পরিমাণ কত তাহা কহ।

২২। এক বিষম চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি ৬০ হস্ত তৎসমুখস্থ ভুজ ২৫, দুই পার্শ্ব ৩৯ এবং ৫২ এবং এক কর্ণ ৬৩ তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

২৩। এক বিষম চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি পরিমাণ ৩০০ হস্ত তৎসমুখস্থ ভুজ ১২৫, দুই পার্শ্ব ২৬০ এবং ১২৫, দুই কর্ণ ৩১৫ এবং ২৮০, দুই শৃঙ্খল হইতে পতিত দুই লম্ব ২৮২ এবং ২২৪, তাহার কর্ণ এবং লম্ব কত দূর উঠিয়া সম্প্রতিত হইবে এবং দুই কর্ণের সম্প্রতিত চিহ্ন হইতে পতিত লম্ব পরিমাণ কত? আর দুই পার্শ্বস্থ বাহু বর্দ্ধিত হইলে কত দূরে পরস্পর সম্প্রতিত হইবে? এবং সেই সম্প্রতিত চিহ্ন হইতে ভূমি পর্য্যন্ত লম্বপাত করিলে সে লম্বের পরিমাণ কত? তাহার আবাধের পরিমাণই বা কত? এবং বিষম চতুর্ভুজের শৃঙ্খল-পরি উৎপন্ন সূচী অর্থাৎ ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল কত? অপর দুই কর্ণ বর্দ্ধিত হইয়া কত দূরে ভূম্যা হইতে নিক্রান্তিত লম্বের সহিত সম্প্রতিত হইবে আর ঐ লম্বের প্রত্যেকের পরিমাণই বা কত হইবে? এই সকল প্রশ্নের উত্তর প্রদান কর।

২৪। বৃত্ত ব্যাসের পরিমাণ ৭ হইলে পরিধি পরিমাণ কত হইবে এবং পরিধি পরিমাণ ২২ হইলে ব্যাসের পরিমাণ কত হইবে।

25. The diameter of a circle being 10 cubits, what will be the length of the arrow or straight line bisecting an arch, 6 cubits in length, at right angles and intercepted between the chord and its arc.

26. If you are acquainted with the spotless Lilavati, say what will be the area of a circle whose diameter is seven? Say also what will be the area of a covering like a net on the surface, as well as the solid contents of a sphere whose diameter is seven?

27. What will be the length of the side of an equilateral triangle inscribed in a circle whose diameter is 2000?

28. What will be the length of the side of a square inscribed in such a circle?

29. What will be the length of the side of an equilateral pentagon inscribed as before?

30. What will be the length of the side of an equilateral hexagon inscribed as before?

31. What will be the length of the side of an equilateral heptagon inscribed as before?

32. What will be the length of the side of an equilateral octagon inscribed as before?

33. What will be the length of the side of an equilateral nonagon inscribed as before?

34. The diameter of a circle being 240 cubits and its circumference being divided into 18 equal parts, what will be the length of the several chords of the following arcs, viz. one-eighteenth, two-eighteenths, three-eighteenths, &c. up to nine-eighteenths of the

১৪। নিম্ন লিখিত দুই ক্ষেত্র অসম্ভব তাহা উপপন্ন কর।  
যথা ভূমি পরিমাণ ১২, ভূমি সম্মুখস্থ বাহু ৩, এবং দুই পার্শ্ব  
২ এবং ৬ এমত এক চতুর্ভুজ, আর তিন বাহু ক্রমশঃ ৩, ৬, ৯  
এমত ত্রিভুজ ক্ষেত্র।

১৫। ভূমি ১৪ হস্ত এবং দুই বাহু ক্রমশঃ ১২ এবং ১৫  
হস্ত এমত এক ত্রিভুজ নির্দিষ্ট আছে তাহার লম্ব এবং ক্ষেত্র  
ফল কত আর দুই আবাধের পরিমাণইবা কত শীঘ্র কহ।

১৬। এক অধিক কোণ ত্রিভুজে অধিক কোণ সংলগ্ন  
ভূমি ৯ হস্ত এবং দুই বাহু ক্রমশঃ ১০ এবং ১৭ নির্দিষ্ট আছে  
হে গণিত বিশারদ তাহার লম্ব ও ফল কত এবং অধিক কোণ  
ও লম্বের মধ্যে ব্যবধানই বা কত তাহা শীঘ্র কহ।

১৭। এক সমলম্ব চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি ১৪ হস্ত, মুখ  
অর্থাৎ ভূমির সম্মুখস্থ ভুজ ৯ হস্ত, দুই পার্শ্ব ক্রমশঃ ১৩ এবং  
১০ এবং লম্বও ১২ নির্দিষ্ট আছে প্রাচীনদিগের কথনামুসারে  
তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

১৮। এক সমবাহু সমানান্তরাল চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভুজ  
পরিমাণ ২৫ হস্ত এবং এক কর্ণের পরিমাণ ৬০ হস্ত তাহাতে  
অপর কর্ণের পরিমাণ কত তাহা কহ এবং কোন সম চতু-  
র্ভুজের ভুজ পরিমাণ ২৫ হইলে কর্ণ পরিমাণ কত হইবে  
তাহা কহ।

১৯। এক আরতের দুই বাহু ক্রমশঃ ৮ এবং ৬ নির্দিষ্ট  
আছে তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

২০। এক সমলম্ব চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি পরিমাণ ২২ হস্ত  
এবং সম্মুখস্থ ভুজ পরিমাণ ১১ হস্ত তথা দুই পার্শ্ব পরি-  
মাণ ক্রমশঃ ২০ এবং ১৩ হস্ত এবং লম্ব পরিমাণ ১২ হস্ত  
নির্দিষ্ট আছে তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

21. In a trapezium the base is 75 cubits, the side opposite to the base 51, the adjacent sides are respectively 40 and 68, the former being also perpendicular to the base; say what its area is, as well as the length of the diagonals and of the perpendicular from the other vertex.

22. In a trapezium the base is 60, the opposite side 25, the adjacent sides 39 and 52 and one of the diagonals is 63; what is its area?

23. In a trapezium the base is as 300 cubits, the opposite side 125, the two adjacent sides 260 and 195, the diagonals 315 and 280, the perpendiculars from the vertices 189 and 224; what portions of the diagonals and the perpendiculars are below their intersections? What will be the length of the perpendicular let fall from the intersection of the diagonals? and the segments of the base answering thereto? How far must the adjacent sides be produced before they will meet, and what will be the length of the perpendicular let fall from that point of contact upon the base? what the segments answering to it? and what the area of the triangle thus formed on the summit of the trapezium? how far must each of the diagonals be produced before it will meet a perpendicular drawn from the opposite extremity of the base, and what will be the length of each of the perpendiculars?

24. What will be the length of the circumference of a circle whose diameter is 7? and what will be the length of the diameter if the circumference is 22?

২৫। হে সুবুদ্ধি পুরুষ যদি বিমল। লীলাবতী অবগত  
হইয়াছ তবে বল দেখি বৃত্ত বাস ৭ হইলে তৎক্ষেত্র ফল কত  
হইবে? এবং গোলের বাস পরিমাণ ঐরূপ হইলে কন্দুক  
জালের ন্যায় তৎপৃষ্ঠ ফল কত ও তন্মধ্যস্থিত ঘন ফলই বা কত  
হইবে।

২৬। বৃত্ত বাস ১০ হস্ত পরিমাণ নিরূপিত আছে তাহাতে  
৬হস্ত পরিমিত পূর্ণজ্যার শর অর্থাৎ ঐ জ্যার দ্বিখণ্ড কারিণী  
অথচ জ্যা এবং চাপের মধ্যবর্ত্তিনী লম্ব রেখার পরিমাণ কত  
হইবে তাহা কহ।

২৭। বৃত্ত বাস পরিমাণ ২০০০ হইলে তদন্তর্গত সমবাহক  
ত্রিভুজের ভূজ পরিমাণ কত হইবে।

২৮। ঐরূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহক চতুর্ভুজের পরিমাণ  
কত?

২৯। ঐরূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহক পঞ্চভুজের পরিমাণ  
কত?

৩০। ঐরূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহক ষড়্ভুজের পরিমাণ  
কত?

৩১। ঐরূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহক সপ্তভুজের পরিমাণ  
কত?

৩২। ঐরূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহক অষ্টভুজের পরিমাণ  
কত?

৩৩। ঐরূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহক নবভুজের পরিমাণ  
কত?

৩৪। বৃত্তের বাস পরিমাণ ২৪০ হস্ত নিরূপিত আছে এবং  
পরিধি সমান ২ অর্কাদিশ অংশে বিভক্ত আছে অতএব তাহার  
একাংশ দুই অংশ তিনঅংশ ইত্যাদি নবাংশ পর্যন্ত পৃথক  
চাপের পূর্ণজ্যা পরিমাণ কিং হইবে।



## GLOSSARY OF TERMS.

<i>English.</i>	<i>Bengali.</i>	<i>Bengali.</i>	<i>English.</i>
Acute angle.	গম্ব কোণ।	অকরণী	Rational.
Acute angled triangle	গম্ব কোণ ত্রিভুজ।	ত্রি-গম্ববর্ত্তি অকরণিত	Antecedent
Addition	সঙ্কলন।	অণুপাত	Arithmetic
Adjacent	সংলগ্ন, সন্নিহিত	অধিক কোণ	Oval.
Algebra.	দ্বীজ গণিত।	অধিক কোণ	Obtuse-angle.
Alternando.	বিনিময় অপ্তি।	ত্রিভুজ অনুপাত	Obtuse angled triangle
Alternate	অপর পার্শ্বস্থ	অনুপাতীয়	Proportion.
Altitude.	উন্নতি।	অনুমান	Proportional.
Angle.	কোণ।	অন্তর	Corollary
Annulus.	বलय।	অন্তর্গত	Difference.
Antecedent.	অগ্রবর্ত্তি।	অপবর্ত্তা	Inscribed.
Arc	চাপ।	অপবর্ত্তন	Multiple.
Arithmetic.	অঙ্কগণিত।	অপর পার্শ্বস্থ	Measure.
Axiom.	স্বতঃসাধ্য।	অবনতি	Alternate.
Base.	ভূমি।	অবশিষ্ট	Inclination
Biquadrate.	চতুর্ঘাত।	অঙ্কচক্রাকৃতি	Complement
Bisect.	বিখণ্ড।	অঙ্কবৃত্ত	Lune.
Catenary.	শঙ্খল রেখা।	অসীম, অপর-মিত	Semi-circle.
Centre.	কেন্দ্র।	উন্নতি	Unlimited, In- definite.
Chord.	স্থলজ্যা।		Altitude.

<i>English.</i>	<i>Bengali.</i>	<i>Bengali.</i>	<i>English.</i>
Circle.	বৃত্ত ।	উপপত্তি	Demonstration.
Circumference.	পরিধি ।	উপপাদ্য	Theorem.
Co-efficient.	গুণক ।	উভয়তঃ	Reciprocal.
Complement.	অবশিষ্ট ।		Minus.
Componendo.	যোগ নিষ্পত্তি	কল্প	Surd.
Concave.	উত্তানাকৃতি ।	করণী	Radius.
Concentric.	সমন্বিত ।	ককট	Diagonal, hy-
Consequent.	পশ্চাদ্বর্ত্তি ।	কর্ণ	pothennse.
Contact.	স্পর্শন ।		Centre.
Continued pro-	অবিবর্ত্তনিষ্পত্তি	কল্প	Perpendicular
portion.		কোটি	Angle.
Convertendo.	পরিবর্ত্তনিষ্পত্তি	কোণ	Segment.
Convex.	স্বাব্জাকৃতি ।	খণ্ড	Mathematics.
Corollary.	অনুমান ।	গণিত শাস্ত্র	Co-efficient.
Cube.	ঘন ।	গুণক	Sphere.
Cycloid.	সাক্ষন রেখা ।	গোল	Exponent.
Decagon.	দশভুজ ।	ঘাতমাপক	Arc.
Demonstrati-	উপপত্তি ।	চাপ	Biquadrate.
on.			Quadrilateral.
Describe.	নিরূপণ ।	চতুর্ঘাত	Rectangular
Diagonal.	কর্ণ ।	চতুর্ভুজ	triangle.
Diameter (of	বাস ।	জাতা ত্রিভুজ	Scholium.
a circle.)			Trisect.
Diameter (of	কর্ণ ।	টাকা	Triang'le.
a quadrila-		ত্রিখণ্ড	Decagon.
teral figure.)		ত্রিভুজ	
Difference.	অন্তর ।	দশভুজ	
Dividendo.	বিয়োগ	নি-	
	পত্তি ।		

English.	Bengali.	Bengali.	English.
Duplicate ratio.	দ্বিঘাত নিম্ন- তি।	দ্বিঘাত নিম্ন- তি।	Bisect. Duplicate ratio.
Ellipse.	অণ্ডাকৃতি, বৃত্তা- ভাস।	ধন চিহ্ন	Plus.
Equiangular.	সমান কোণ।	ধরাতল	Plane.
Equilateral.	সম বাহক।	নির্দিষ্ট	Given.
Equimultiple.	সম অপবর্ত্য।	নিষ্কাশন	Describe.
Ex-equali.	সামান্যতঃ।	নিম্পত্তি	Ratio.
Exponent.	ঘাত মাপক।	পঞ্চদশভুজ	Quindecagon.
Figure.	ক্ষেত্র।	পঞ্চভুজ	Pentagon.
Given.	নির্দিষ্ট।	পরিধি।	Circumference
Geometry.	ক্ষেত্র তত্ত্ব।	পরিমিতি	Perimeter
Gnomon.	শঙ্ক।	পরিবর্ত নি- ম্পত্তি	Convertendo
Hexagon.	ষড়ভুজ।	পঞ্চাধর্তি	Consequent
Homologous.	সবর্ণীয়।	পূর্ণজ্য।	Chord.
Hyperbola.	হাইপর্বোলা।	প্রতিজ্ঞা।	Proposition
Hypothenuse.	কর্ণ।	বর্গ	Square
Inclination.	অবনতি।	বর্গমূল	Square root.
Indefinite.	অসীম, অপরি- মিত।	বলয়	Annulus.
Inscribe.	অন্তর্গত করণ।	বহুভুজ	Polygon.
Intersection.	সম্পাত।	বিজাতীয়	Unlike.
Invertendo.	বিলোম নিম্ন- তি।	বিমিশ্র নিম্ন- তি	Alternando.
Irrational.	করণী।	বিন্দু	Point.
Isosceles.	সমদ্বিবাহক।	বিয়োগ নিম্পত্তি	Dividendo.
Line.	রেখা।		
Logarithm.	লগারিথম, ঘাত মাপক।		

English.	Bengali.	Bengali.	English.
Lune.	অঙ্ক চক্রাকৃতি	বিনোম নি- স্পত্তি	Invertendo.
Magnitude.	মহত্ব, রাশি।		
Mathematics.	গণিত শাস্ত্র।	বিষয় চতুর্ভুজ	Trapezium.
Mean propor- tional.	মধ্যস্থপাতীয়	বিষয় বাহক	Scalene.
Measure.	অপবর্তন।	বীজগণিত	Algebra.
Minus.	ঋণ চিহ্ন।	প্যাকলন	Subtraction.
Multilateral.	বহু ভুজ।	ব্যাস	Diameter.
Multiple.	অপবর্ত	মাগাক্ষ	Semi-diameter
Oblong.	আয়ত।	বৃত্ত	Circle.
Obtuse angle.	অধিক কোণ	বৃত্তক্ষেত্র	Sector.
Obtuse-angled triangle.	অধিক কোণ ত্রিভুজ।	বৃত্তপাদ	Quadrant.
Oval.	অণ্ডাকৃতি।	বৃত্তপাদ সং- লগ্ন	Quadrantal.
Parabola.	ক্ষেপণি রেখা।	বৃত্ত স্পর্শক	Tangent.
Parallel.	সমানান্তরাল।	বৃত্তভাস	Ellipse.
Parallelo- gram.	সমানান্তরাল ক্ষেত্র।	ভুজ	Side.
Pentagon.	পঞ্চভুজ।	ভূমি	Base.
Perimeter.	পরিমিতি।		
Permutando.	বিনিময়নি স্পতি	মধ্যস্থপাতীয়	Mean propor- tional.
Perpendicular	লম্ব।		
Plane super- ficies.	সমধরাতল।	মহত্ব	Magnitude.
Plus.	ধন চিহ্ন।	যোগ নিস্পত্তি	Componendo.
Point.	বিন্দু।	যোগ, যুতি	Sum.
Polygon.	বহুভুজ।	রম্বস	Rhombus.
Postulate.	স্বীকার্য কথা।	রম্বড	Romboid.

# GLOSSARY OF TERMS.

English.	Bengali.	Bengali.	English.
Problem.	সমস্যা।	রাশি	Quantity.
Proportion.	অনুপাত।	রেখা	Line.
Porportional.	অনুপাতীয়।	লম্ব কোণ	Acute angle.
Proposition.	প্রতিজ্ঞা।	লম্ব কোণি ত্রি-	Acute angled
Quadrant.	বৃত্তপাদ।	ভুজ	triangle.
Quadrantal.	বৃত্তপাদ সং- ক্রান্ত।	লম্ব	Perpendicular
Quadrilateral.	চতুর্ভুজ।	লগা রিথম	Logarithm.
Quadruplicate.	চতুর্ঘাত।	শব্দ	Quonion.
Quantity.	রাশি।	শর	Arrow, versed sine.
Quindecagon.	পঞ্চদশভুজ	শৃঙ্খল	Vinculum.
Radius.	ককট, ব্যাসার্ধ।	শৃঙ্খল রেখা	Catenary.
Ratio.	নিম্পত্তি।	শূন্য	Vertex.
Rational.	অকরণীয়।	শূন্য	Vertical.
Reciprocal.	উভয়তঃ।	ষড়ভুজ	Hexagon.
Rectangle.	আয়ত।	সঙ্কলন	Addition.
Rectilineal.	সরল রেখিক।	সদৃশ	Similar.
Rhomboid.	রম্বয়েড।	সমন অপবর্ত্য	Equimultip
Rhombus.	রম্বস।	সমকক্ৰ	Concentric.
Right angle.	সমকোণ।	সমকোণ	Right angle.
Right angled	সমকোণি, ত্রিভুজ	সমকোণি ত্রি-	Right angled
triangle.	জাত্য ত্রিভুজ।	ভুজ	triangle.
Scalene.	বিষম বাহক।	সম চতুর্ভুজ	Square.
Scholium.	টাকা।	সম দ্বিবাহক	Isosceles tri-
Sector.	বৃত্তক্ষেত্রক।	ত্রিভুজ	angle.
Segment.	খণ্ড।		
Semicircle.	অর্ধবৃত্ত।		

English.	Bengali.	Bengali.	English.
Similar.	সদৃশ।	সমনকর	Equi-perpendicular.
Sphere.	গোলক।	সমন বালক	Equilateral.
Square (Geometrical.)	সমচতুর্ভুজ।	সমান কোণি	Equiangular.
Square (Arithmetical.)	বর্গ।	সমান (কেন্দ্রাল)	Parallel.
Square root.	বর্গমূল।	সমানান্তরাল ক্ষেত্র	Parallelogram
Straight line.	সরল রেখা।		
Subtend.	সম্মুখস্থ হওয়া।	সম্প্রতি	Intersection.
Subtraction.	ব্যবকলন।	সম্পাদ্য	Problem.
Sum.	যোগ, যুতি।	সম্মুখস্থ	Opposite.
Superficies.	পৃষ্ঠ।	সমবর্ণীয়	Homologous.
Surd.	করণ।	সরল রেখা	Straight line.
Tangent.	বক্র স্পর্শক।	সরল রেখিক	Rectilineal.
Theorem.	উপপাদ্য।	সমানিতঃ	Ex-equali.
Touch.	স্পর্শ।	স্পর্শক	Tangent.
Trapezium.	বিষমচতুর্ভুজ।	স্পর্শন	Contact.
Triangle.	ত্রিভুজ।	সম্মুখ রেখা	Cycloid.
Trilateral.	ত্রিভুজ।	সংলগ্ন, সম্মিহিত	Axiom.
Triplicate.	ত্রিঘাত।	হাইপর্বোলা	Hyperbola.
Trisect.	{ ত্রিখণ্ড, তিন স- মান ভাগে বি- ভক্ত করণ।	সংলগ্ন, সম্মিহিত	Adjacent.
Unlike.	বিজাতীয়।	কেন্দ্র	Figure.
Vertex.	শৃঙ্গ।	কোণি রেখা	Parabola.
Vertical.	শৃঙ্গস্থ।		
Vinculum.	শৃঙ্গল।		

# ENCYCLOPÆDIA BENGALENSIS.

ALREADY PUBLISHED.

No. I.	Hist. of Rome part I (Diglot Edition,) .....	2	8
"	" (Bengali Edition,) ..	1	4
"	Ditto to native students, .	0	10
No. II.	Geometry part I. (Diglot Edition,)....	2	8
"	" (Bengali Edition,) ..	1	4
"	Ditto to native students,,	0	10
No. III.	Miscellaneous part I. (Diglot Edition,) ..	2	8
"	" (Bengali Edition,) ...	1	4
"	Ditto to native students...	0	10
No. IV.	Hist. of Rome part II. (Diglot Edition) ...	2	8
"	" (Bengali Edition,) ..	1	4
"	Ditto to native students, .	0	10
No. V.	Biography part I. (Diglot Edition,) ...	2	8
"	" (Bengali Edition,)... ..	1	4
"	Ditto to native students,,	0	10
No. VI.	History of Egypt (Diglot Edition).....	2	8
"	" (Bengali Edition,).....	1	4
"	Ditto to native students,,	0	10
No. VII.	Miscellaneous part II. (Diglot Edition).....	2	8
"	" (Bengali Edition,).....	1	4
"	Ditto to native students, .	0	10
No. VIII.	Geography part I. (Diglot Edition,) .....	2	8
"	" (Bengali Edition,).....	1	4
"	Ditto to native students, .	0	10
No. IX.	Geometry, part II. (Diglot Edition,).....	2	8
"	" (Bengali Edition,).....	1	4
"	Ditto to native students, .	0	10

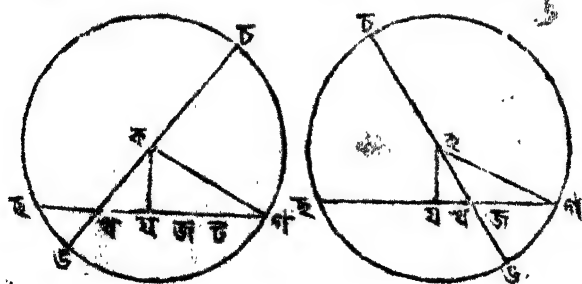
অনুমান। কখগ ত্রিভুজ কখগ ত্রিভুজের সদৃশ কেননা  
খকঘ গকঙ ত্রিভুজে ঘ এবং ঙ সদৃশকোণ এবং ক কোণ উভয়  
পক্ষে সামান্য হওয়াতে তাহার সমান কোণ হইবে একারণ  
খক: কঘ:: গক: কঙ সুতরাং বিনিময় নিষ্পত্তিতে খক: গক::  
কঘ: কঙ অতএব খকগ ঘকঙ ত্রিভুজের ক সামান্য কোণ এবং  
তৎপার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে তাহার সমান কোণ  
এবং সদৃশ ( ৬। ৬ )।

### ট প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন কোন হইতে সমুখস্থ বাহু কিম্বা ভূমিতে  
যদি লম্বপাত হয় তবে অন্য দুই বাহুর যোগ এবং অন্তরের  
আয়ত ভূমির সম দ্বারা ছিন্ন দুই খণ্ডের যোগ এবং অন্তরের  
আয়ত সূচ্য হইবে।

কখগ ত্রিভুজের ক কোণ হইতে খগ ভূমির উপর কঘ লম্ব  
পাত কল্পনা কর, তাহাতে খঘ ঘগ ভূমির খঙ হওয়াতে  
( কগ + কখ ) ( কগ—কখ ) = ( গঘ + ঘখ ) ( গঘ—ঘখ )  
হইবে।

ক কেন্দ্র হইতে দুই বাহুর বৃহত্তর কগ ককট করিয়া গচছ



বৃত্ত নিক্ষেপন কর এবং কখ রেখাকে পরিধিস্থ চ ও পর্যাস্থ  
বৃদ্ধি কর অপূর্ণ গঘ রেখাকে ছ পর্যাস্থ বৃদ্ধি কর। কচ = কগ



AB to meet the circumference in E and F, and CB to meet it in G. Then because  $AF = AC$ ,  $BF = AB + AC$ , the sum of the sides; and since  $AE = AC$ ,  $BE = AC - AB =$  the difference of the sides. Also, because AD drawn from the centre cuts GC at right angles, it bisects it (3. 3.); therefore, when the perpendicular falls within the triangle,  $BG = DG - DB = DC - DB =$  the difference of the segments of the base, and  $BC = BD + DC =$  the sum of the segments. But when AD falls without the triangle,  $BG = DG + DB = CD + DB =$  the sum of the segments of the base, and  $BC = CD - DB =$  the difference of the segments of the base. Now, in both cases, because B is the intersection of the two lines FE, GC, drawn in the circle,  $FB.BE = CB.BG$  (35. 3.): that is, as has been shewn,  $(AC + AB).(AC - AB) = (CD + DB).(CD - DB)$ . Therefore &c. Q. E. D.

Cor. 1. The rectangle contained by the sum and difference of the two sides, is equal to twice the rectangle contained by the base, and the segment between the middle of the base and the perpendicular on it from the opposite angle. Let H be the middle of base, and when the perpendicular AD falls within the triangle, take HK equal to HD: then  $CK = BD$ , and  $CD - BD = DK = 2DH$ .

Again, when AD falls without the triangle, it is evident that the sum of CD and BD is equal to the sum of CB and  $2BD$ , or to the sum of  $2BH$  and  $2BD$ , that is to  $2DH$ . Since then, in the first case,  $CD + BD = BC$ , and  $CD - BD = 2HD$ ; and in the second,  $CD - BD = BC$ , and  $CD + BD = 2DH$ . it is manifest from the proposition, that in both  $(CA + AB).(CA - AB) = 2HD.CB$ .

Cor. 2. The difference between the squares of any two sides of a triangle, is equal to the difference between the squares of the segments, into which the remaining side is divided by a perpendicular from the opposite angle.

তৃত্বাং খচ = কখ + কগ অর্থাৎ ত্রিভুজের দুই বাহুর যোগ ।  
তথা কঙ = কগ একারণ খঙ = কগ—কখ অর্থাৎ উক্ত দুই  
বাহুর অন্তর । অপর কঘ রেখা গছ রেখার উপর কেন্দ্র হইতে  
লম্বভাবে নিষ্কাশিত হওয়াতে তাহা গছ রেখাকে বিখঙ করি-  
তেছে । (৩৩) অতএব লম্ব ত্রিভুজের মধ্যে পড়িলে খছ = ঘছ  
—খঘ = গঘ—খঘ = ভূমি খঙের অন্তর এবং খগ = খঘ +  
ঘগ = ভূমি খঙের যোগ । পরন্তু লম্ব ত্রিভুজের বাহিরে পড়িলে  
খছ = ঘছ + ঘখ = গঘ + ঘগ = ভূমি খঙের যোগ এবং খগ =  
গঘ—ঘখ = ভূমি খঙের অন্তর । উভয় পক্ষেই খ বিন্দু বৃত্ত মধ্যে  
নিষ্কাশিত ওচ এবং গছ রেখার পরস্পর সম্প্রতি চিত্র হওয়াতে  
চখ.খঙ = গখ.ছখ অর্থাৎ যেনত পূর্বে দর্শিত হইয়াছে  
(কগ + কখ). (কগ—কখ) = (গঘ + ঘখ). গঘ—ঘখ  
অতএব ত্রিভুজের ইত্যাদি । ইহাই এস্থলে উপপাদ্য ।

১ অনুমান । দুই বাহুর যোগ এবং অন্তরের আয়ত ভূমির  
এবং ভূমি মধ্য ও লম্বের মধ্যবর্ত্তি খঙের আয়তের দ্বিগুণ  
হইবে । জ ভূমি মধ্য কল্পনা কর এবং কঘ লম্ব ত্রিভুজের মধ্যে  
পড়িলে জট জঘ সমান কল্পনা কর তাহাতে গট = খঘ এবং  
গঘ—খঘ = ঘট = ২ঘজ ।

অপর স্পষ্ট বোধ হইতেছে কঘ লম্ব ত্রিভুজের বাহিরে  
পড়িলে গঘ এবং খঘ রেখার যোগ খগ এবং ২খঘ অথবা  
২খজ এবং ২খঘ যোগ তুল্য অর্থাৎ ২ঘজ তুল্য । প্রথম  
প্রকরণে গঘ + খঘ = খগ এবং গঘ—খঘ = ২জঘ দ্বিতীয়  
প্রকরণে গঘ—খঘ = খগ এবং গঘ + খঘ = ২ঘজ অতএব  
উক্ত প্রতিজ্ঞাতে নিশ্চয় বোধ হইতেছে যে উভয় প্রকরণে  
(গক + কখ). (গক—কখ) = ২ জঘ. গখ ।

২ অনুমান । ত্রিভুজের দুই বাহুর সমচতুর্ভুজের অন্তর  
অবশিষ্ট বাহুর সম্মুখস্থ কোণ হইতে নিষ্কাশিত লম্ব দ্বারা  
হিস দুই খঙের সমচতুর্ভুজের অন্তর তুল্য হইবে ।

For since by the proposition  
 $(AC + AB)(AC - AB) = (CD + DB)(CD - DB)$ ,  
 and  $(AC + AB)(AC - AB) = AC^2 - AB^2$   
 (Cor. 5. 2.); also  $(CD + DB)(CD - DB) = CD^2 - DB^2$   
 (Cor. 5. 2.); therefore  $AC^2 - AB^2 = CD^2 - DB^2$ .

### PROP. I. THEOR.

*If the bases of four rectangles be proportionals, and also their altitudes; the rectangles themselves shall be proportionals.*



Let A, B, C, D, be the bases of four rectangles, and E, F, G, H, their altitudes; and let  $A : B :: C : D$ , and  $E : F :: G : H$ ; the rectangles A.E, B.F, C.G, D.H are proportionals.

For the ratio of the rectangle A.E to the rectangle B.F is compounded of the ratios of A to B, and E to F (23. 6.), which, by hypothesis, are the same as the ratios of C to D, and of G to H: but the ratio of the rectangle C.G to the rectangle D.H is compounded of the same ratios (23. 6.); therefore the rectangle A.E is to the rectangle B.F, as the rectangle C.G to the rectangle D.H (F. 5.). Q. E. D.

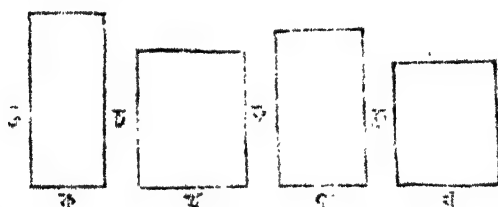
কেননা পূর্বোক্ত প্রতিজ্ঞানুসারে

(কগ + কথ) . (কগ—কথ) = (গঘ + ঘথ) . (গঘ—  
ঘথ) এবং (২ . ৫ অনুমান) (কগ + কথ) . (কগ—কথ)  
= কগ<sup>২</sup>—কথ<sup>২</sup> তথা (গঘ + ঘথ) . (গঘ—ঘথ) =  
গঘ<sup>২</sup>—ঘথ<sup>২</sup> অতএব কগ<sup>২</sup>—কথ<sup>২</sup> = গঘ<sup>২</sup>—ঘথ<sup>২</sup>।

৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি আয়তের ভূমি এবং উন্নতি যদি অনুপাতীয় হয়  
তবে ঐ আয়ত সকলও অনুপাতীয় হইবে।

ক, খ, গ, ঘ, চারি আয়তের ভূমি এবং ক, খ, গ, ঘ ও ক, খ, গ, ঘ  
এবং উন্নতি হইবে এবং ক : খ :: গ : ঘ ও ক : গ :: খ : ঘ



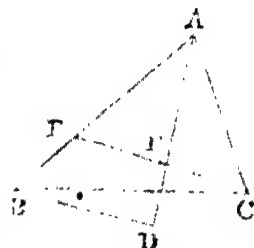
করনা কর ইহাতে ক, খ, গ, ঘ, আয়ত অনুপাতীয়  
হইবে।

কেননা ক, খ, গ, ঘ আয়তের পরস্পর নিম্নতি পরিমাণ  
ক, খ এবং গ, ঘ রেখার পরস্পর নিম্নতি পরিমাণের  
যোগোৎপন্ন (৩২৩) অপর করনানুসারে ঐ সকল রেখার  
নিম্নতি পরিমাণ গ, ঘ এবং ক, খ রেখার পরস্পর  
নিম্নতি পরিমাণ তুল্য এবং গ, ঘ ও ক, খ আয়তের পরস্পর  
নিম্নতি পরিমাণ ঐ শেবোক্ত রেখার পরিমাণের যোগোৎপন্ন  
অতএব ক, খ আয়ত যথা খ, ঘ সম্বন্ধে গ, ঘ তথা ঘ, খ সম্বন্ধে  
উপপন্ন হইল (৫৮)। ইহাই এখানে উপপাদ্য।

## PROP. M. THEOR.

*If perpendiculars be drawn from the extremities of the base of a triangle on a straight line, which bisects the angle opposite to the base; the area of the triangle is equal to the rectangle contained by either of the perpendiculars, and the segment of the bisecting line between the angle and the other perpendicular.*

Let ABC be any triangle, of which BC is the base, AD a line bisecting the opposite angle, and BD, CE perpendiculars on that line: The area of the triangle ABC is equal to the rectangle CE.AD; and it is also equal to the rectangle BD.AE.

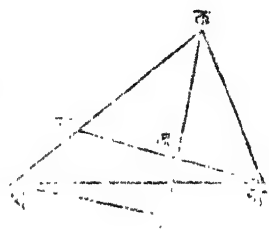


Produce CE, the perpendicular drawn from one of the extremities of the base, to meet the opposite side in F; the lines CF, BD will manifestly be parallel, and DE perpendicular to them both (27. 1.) And because in the triangles AEC, AEF the angle AEC is equal to AEF, EAC to EAF, and the side AE is common, the triangles are in all respects equal (26. 1.); therefore CF is bisected in E. Again, because the triangle BAC is the sum of the triangles ACF, BCF, and the triangle ACF is equal to the rectangle contained by CE and AE (41. 1.), and the triangle BCF to the rectangle contained by CE and DE (41. 1.): therefore the triangle ABC is equal to the sum of the rectangles contained by CE and AE, CE and DE, and hence it is equal to the rectangle CE.AD (1. 2.). And because the triangles BAD, CAE are equiangular, AD : BD :: AE : CE (4. 6.); therefore the rectangle CE.AD is equal to BD.AE (16. 6.), wherefore, either of these is

ড প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

ত্রিভুজের শৃঙ্খল কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী সরল রেখার উপর  
যদি ভূমির দুই প্রান্ত হইতে লম্বপাত হয় তবে একটি লম্ব  
রেখার এবং শৃঙ্খল কোণ ও অন্য লম্ব মধ্যবর্ত্তি দ্বিখণ্ডকারিণী  
রেখার খণ্ডের সম্যক ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল পূর্ণ হইবে।

কখন হিড়কোর খণ্ড ভগ্নি এবং  
কলু শঙ্কর কোণ দিখি কারিণী  
সবল বেথা আর খণ্ড গড়  
লয় কল্পনা কর। কখন হিড়-  
কো, কোর ফল গড়, কখন অথবা  
খণ্ড, কলু আয়ত ফলা হইবে।



ভূমির এক প্রান্তে উঠতে নিষ্কাশিত গও লক্ষ্যকে সম্মুখবর্তী  
বাতাস চ বিন্দু পর্যন্ত বৃদ্ধি করে। গত খগ পরস্পর সমানান্ত-  
রাণ ইহা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে এবং ঘণ্ড তাহারানের উত-  
ত্বের দুই ( ১।২৭ )। অপর কণ্ড এবং কণ্ড দুই ত্রিভুজ  
কণ্ড কোণ কণ্ড সমান ওকচ কোণ ওকণ সমান এবং কণ্ড  
বাহু উভয় পক্ষে সামান্য একারণ কণ্ড এবং কণ্ড দুই  
ত্রিভুজ সর্বসত্তাভাবে পরস্পরের সমান। ( ১.২৬ ) অতএব গণ্ড  
ও বিন্দুতে দিখণ্ডিত হইয়াছে। অধিকন্তু খগ ত্রিভুজ কণ্ড  
এবং খগচ দুই ত্রিভুজের যোগতুল্য এবং কণ্ড ত্রিভুজ গণ্ড  
ও কণ্ড রেখার আয়ত তুল্য ( ১.২১ ) ওখা খগচ ত্রিভুজ গণ্ড  
এবং ঘ রেখার আয়ত তুল্য একারণ কখগ ত্রিভুজ গণ্ড ও  
কণ্ড রেখার আয়ত এবং গণ্ড ও ওঘ রেখার আয়তের যোগ  
তুল্য সুতরাং তাহা গণ্ড.কখ আয়তের সমান ( ২।১ )  
অপিচ খকখ এবং গকণ্ড দুই ত্রিভুজ সমান কোণ একারণ  
কখ : খঘ :: কণ্ড : গণ্ড ( ৬।৩ ) তন্নিমিত্ত কখ. গণ্ড আয়ত খঘ.  
কণ্ড সমান ( ৬।১৬ ) অতএব ইহার প্রত্যেকে কখগ ত্রিভুজের

equal to the area of the triangle  $ABC$ . Therefore,  
&c. Q. E. D.

### PROP. N. THEOR.

*If perpendiculars be drawn from the extremities of the base of a triangle on a straight line which bisects the angle opposite to the base: Four times the rectangle contained by the perpendiculars is equal to the rectangle contained by two straight lines, one of which is the base increased by the difference of the sides, and the other the base diminished by the difference of the sides.*

Let  $ABC$  be any triangle, of which  $BC$  is the base, and  $AB$  the greater of the two sides, let  $AD$  be a line bisecting the angle opposite to the base, and  $BD, CE$  perpendiculars on that line: Four times the rectangle contained by  $BD$



and  $CE$  is equal to the rectangle contained by a straight line equal to  $BC + (AB - AC)$  and a straight line equal to  $BC - (AB - AC)$ .

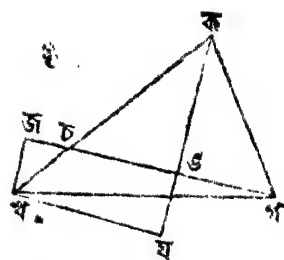
Produce  $CE$  the perpendicular drawn from one of the extremities of the base to meet the opposite side  $BA$  in  $F$ : and draw  $BH$  perpendicular to  $CF$ : The figure  $BHED$  thus formed will manifestly be a parallelogram (28. 1.): And because in the triangles  $AEC, AEF$ , the angle  $AEC$  is equal to  $AEF$ ,  $EAC$  to  $EAF$ , and the side  $AE$  is common: the triangles are in all respects equal (26. 1.), and have  $AC = AF$ , and  $EC = EF$ : and because  $CF$  the base of the triangle  $CBF$  is bisected in  $E$ , and  $BH$  is drawn perpendicular to  $CF$  from the opposite angle,

ক্ষেত্র ফল তুল্য । অতএব ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ইত্যাদি । ইহাই  
গ্রন্থে উপপাদ্য ।

### ৮ প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী সরল রেখার উপর  
নদি ভূমির দুই প্রান্ত হইতে লম্বপাত হয় তবে ভূমিতে দুই  
ভুজের অন্তর যোগে উৎপন্ন সরল রেখার এবং ভূমি হইতে  
দুই ভুজের অন্তর বিয়োগে অবশিষ্ট সরল রেখার আয়ত এই  
দুই লম্বের আয়তের চতুর্গুণ হইবে ।

কথ্য ত্রিভুজের খগ ভূমি এবং কথ্য বৃহত্তর ভুজ কল্পনা  
করিলে শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ড  
কারিণী কথ্য সরল রেখা নির্দেশ  
করিয়া ভূমির প্রান্ত হইতে তা-  
হার উপর খগ গঙ লম্বপাত  
কর । খগ + (কথ—কগ) এবং  
খগ—(কথ—কগ) তুল্য দুই  
সরল রেখায় উৎপন্ন আয়ত  
খগ এবং গঙ রেখার আয়তের চতুর্গুণ তুল্য হইবে ।



ভূমির এক প্রান্ত হইতে নির্দ্যাসিত লম্ব গঙ রেখাকে সম্মুখ-  
বর্ত্তি কথ্য বাহুস্থ চ বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং অথ রেখা গচ  
রেখার লম্ব ভাবে নির্দ্যাসন কর তাহাতে স্পষ্ট বোধ হইবেক  
খজগুখ সমানান্তরাল ক্ষেত্র (১২৮) অপর কঙগ কঙচ ত্রিভুজে  
কঙগ কোণ কঙচ সমান এবং ওকগ কোণ ওকচ সমান  
আর কঙ সমান বাহু, একারণ এই দুই ত্রিভুজ সর্বতোভাবে  
পরস্পর সমান (১২৬) সুতরাং কগ = কচ এবং ওগ = ওচ ।  
অধিকন্তু গখচ ত্রিভুজের গচ ভূমি ও বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত এবং  
গচ বাহুর উপর সম্মুখস্থ কোণ হইতে খজ লম্বপাত হই-  
য়াছে একারণ



$(BC + BF)(BC - BF) = 2FC.EH$  (Cor. 1. K. 6.)

Now  $BC + BF = BC + (BA - AC)$ , and  $BC - BF = BC - (BA - AC)$  and  $2FC = 4CE$ , and  $EH = BD$  (34. 1.); therefore

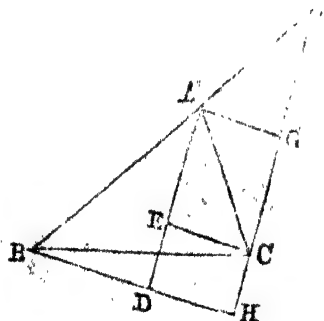
$$\left\{ BC + (BA - AC) \right\} \cdot \left\{ BC - (BA - AC) \right\} = 4BD.CE. \text{ Therefore, \&c. Q. E. D.}$$

### PROF. O. THLOR.

*If perpendiculars be drawn from the extremities of the base of a triangle on a straight line which bisects the angle opposite to the base: Four times the rectangle contained by the segments of the bisecting line between the angle and the perpendiculars, is equal to the rectangle contained by two straight lines, one of which is the sum of the sides increased by the base, and the other the sum of the sides diminished by the base.*

Let  $ABC$  be any triangle, of which  $BC$  is the base,

And a line bisecting the opposite angles, and  $BD$ ,  $CE$  perpendiculars on that line: Four times the rectangle contained by  $AD$  and  $AE$  is equal to the rectangle



contained by a straight line equal to  $AB + AC + BC$ , and a straight line equal to  $AB + AC - BC$ .

(খগ + খচ) + (গগ—গচ) = ২চগ. উক (৩। উ ১ অমু-  
নান) অপর খগ + খচ = খগ + (খক—কগ) এবং  
খগ—খচ = গগ—(খক—কগ) এবং ২ চগ = ৪ গগি এবং ৪ জ  
= খঘ অত্রক

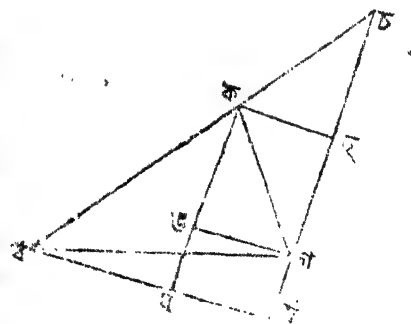
{ খগ + (খক—কগ) } { গগ—(খক—কগ) } = ৪খঘ.  
এই ক্ষেত্রের প্রভুজের সমস্ত উচ্চাদি। উচ্চাদি এখানে  
প্রমাণিত।

### প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের সমস্ত কোণ দ্বিখণ্ডক বিনীত করিল রেখার উপর  
সন্নিবিষ্ট দুই প্রান্তে সমস্ত ত্রিভুজের সমস্ত কোণ এবং  
সমস্ত দ্বিখণ্ডক বিনীত রেখা খগোৎপন্ন অক্ষত চতু-  
র্ভুজ হইবে। অক্ষত দুই বাহুর দুই কোণ বিয়োগে  
প্রাপ্ত ফল সরল রেখার সমস্ত তুল্য হয়।

এক ত্রিভুজ কল্পনা কর, খগ তাহার ভূমি, এবং কগ  
সমস্ত কোণ দ্বিখণ্ডক বিনীত রেখা, তখন খগ ও গচ রেখার  
মধ্যস্থ কোণ দুই দুই কোণের সমস্ত আয়ত কখ + কগ  
+ খগ এবং কখ + কগ = খগ তুল্য দুই সরল রেখার আয়-  
তের সমান হইবে।

ভূমির একপ্রান্ত গ  
হইতে কখ রেখার  
কমানারূপে ভাবে  
গছ রেখা নিক্রাসিত  
কর। চ চিহ্নে তাহা  
খক রেখার সহিত  
এবং জ চিহ্নে খঘ  
রেখার সহিত সংযুক্ত  
হউক পরে গচ রেখার



From C, one extremity of the base, draw CG parallel to AD, meeting BA in F, and the perpendicular BD in H; and draw AG perpendicular to CF. The figures AGHD, AGC, thus formed, are manifestly parallelograms (28. & 29. 1.) And because AD is parallel to FH, the angle BAD is equal to AFC, and DAC to ACF (28. & 29. 1.); but BAD is by the hypothesis equal to DAC; therefore the angles AFC, ACF are equal. And because in the triangles AGC, AGF, the angle AGC is equal to AGF, ACG to AFG and the side AG common, the triangles are in all respects equal (26. 1.), and have AC=AF and GC=GF.

Again, because CF, the base of the triangle CBF, is bisected in G, and BH is drawn perpendicular to CF from the opposite angle,

$CF + BC = FB + BC = 2 FC, GH$  (Cor. 1. K. 1.)  
Now  $FB + BC = AB + AC + BC$ , and  $FB - BC = AB - AC - BC$ , and  $2FC = 4CG = 4AE$  (34. 1.), and  $GH = AD$ ; therefore

$(AB + AC + BC) - (AB + AC - BC) = 4AD$   
Therefore, &c. Q. E. D.

উপর কত লম্বপাত কর। এস্থলে স্পষ্ট বোধ হইবেক যে উক্ত রেখায় কছগ এবং কছগ ও দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছে (১। ২৮, ২৯)। অপর কয় চক্র সমানান্তরাল একারণ থাকে কোণ কচ ও কোণের এবং ওকগ কগচ কোণের তুল্য। পরন্তু থাকে কছগ প্রমাণ সকল সমান অতএব কগচ এবং কচ ও দুই কোণ পরস্পর সমান। অপিচ কছগ কচ ও চি দুইয়ের মধ্যে কছগ কোণ কচ ও কোণের এবং কগছ কোণ কচ ও কোণের সমান এবং কচ উভয় পক্ষেই সমান্য বাহু প্রাপ্ত হই দুই ত্রিভুজ সম্বন্ধে ভাঙে সমান। (১। ২৩) সুতরাং কগ = কচ এবং গছ = কচ।

অপর গছ ও চি দুইয়ের গচ ভূমি ছ বিন্দুতে বিখণ্ডিত এবং সমুদয় কোণ ও গতে ভূমির উপর খজ লম্বপাত হইয়াছে

• ত্রিখণ্ড

( চখ + খগ ) ( চখ — খগ ) = ২ চগ, ছজ ( ৩। ১৪ :  
অনু। অধিকন্তু চখ + খগ = কখ + কগ + খগ এবং  
চখ — খগ = কখ + কগ — খগ আর ২ চগ = ৩ গছ = ৩ কঙ  
( ১। ৩৪ ) এবং ছজ = কখ সুতরাং

( কখ + কগ + খগ ) ( কখ + কগ — খগ ) = ৩ কখ  
কঙ। অতএব ত্রিভুজের শৃঙ্খ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপ-  
পাদ্য।

## PROP. P. THEOR.

*Four times the area of any triangle is a mean proportional between two rectangles, viz. one contained by a straight line equal to the sum of the sides increased by the base, and a straight line equal to the sum of the sides diminished by the base; and the other contained by a straight line equal to the base increased by the difference of the sides, and a straight line equal to the base diminished by the difference of the sides.*

Let ABC be a triangle, and let BC, any one of the sides, be taken as its base; four times the area of the triangle is a mean proportional between these two rectangles.



$$(BA + AC + BC) (BA + AC - BC)$$

$$\left\{ BC + (BA - AC) \right\} \left\{ BC - (BA - AC) \right\}$$

Draw AD bisecting the angle opposite to the base; and draw CE, BD perpendiculars on AD. • Because the triangles ABD, ACE are similar,

$$AD : DB :: AE : EC \text{ (4. 6.)}$$

$$\text{Now, } AD : BD :: AD.AE : DB.AE \text{ (1. 6.)}$$

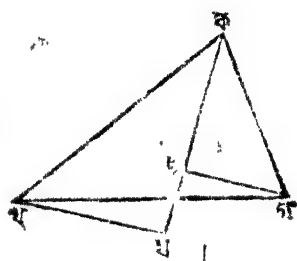
$$\text{And } AE : EC :: BD.AE : BD.EC \text{ (1. 6.)}$$

$$\text{Therefore } AD.AE : DB.AE :: BD.AE : ED.EC$$

## ত প্রতিজ্ঞা । উপপাদ্য ।

ত্রিভুজের দুই বাহুতে ভূমি যোগ করিলে যে রেখার তুল্য হয় এবং ভূমি বিয়োগ করিলে যে রেখার তুল্য অবশিষ্ট থাকে তাদৃশ দুই সরল রেখাতে এক আয়ত উৎপন্ন হইলে এবং দুই বাহুর অস্তর ভূমিযোগে যে রেখা তুল্য হয় ও ভূমি বিয়োগে যে রেখার সমান অবশিষ্ট থাকে এমন দুই সরল রেখাতে আর এক আয়ত উৎপন্ন হইলে এই দুই আয়তের পার্শ্বে ত্রিভুজের চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ফল মধ্যানুপাতীয় হইবে ।

কথগ এক ত্রিভুজ, তাহার  
২য় বাহু ভূমি রূপে গৃহীত  
হইক । ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল  
চতুর্ভুজ হইলে নিম্ন লিখিত  
দুই আয়তের মধ্যানুপাতীয়  
হইবে যথা ।



$$(কখ + কগ + খগ) (কখ - কগ - খগ)$$

$$\{ খগ + (কখ - কগ) \} \{ খগ - কখ - কগ \}$$

ভূমির সমুখস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী কখ সরল রেখা  
নিষ্কৃৎন কর এবং কখ রেখার উপর গঙ এবং খঘ ভ্রম পাত  
কর । অপর কখঘ এবং কগঙ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ একারণ

$$কখ : খঘ :: কঙ : গগ (৬।৪)$$

$$অপর কখ : খঘ :: কখ. কঙ : খঘ. কঙ (৬।১)$$

$$এবং, কঙ : গগ :: খঘ. কঙ : খঘ. গগ (৬।১)$$

$$অতএব কখ. কঙ : খঘ. কঙ :: খঘ. কঙ : খঘ. গগ$$

$$এবং ৪ কখ. কঙ : ৪ খঘ. কঙ :: ৪ খঘ. কঙ : ৪ খঘ. গগ$$

And  $4AD.AE : 4DB.AE :: 4BD.AE : 4BD.EC$   
 But  $4AD.AE = (AB + AC + BC)(AB + AC - BC)$  (O. 6.)  
 And  $4DB.AE =$  four times the area of the triangle  
 $ABC$  (M. 6.) And  $4BD.EC = \{ BC + (BA - AC) \}$   
 $\{ BC - (BA - AC) \}$  (N. 6.) Therefore,  
 $(BA + AC + BC)(BA + AC - BC) : 4Tr. AEC :: 4Tr.$   
 $ABC : \{ BC + (BA - AC) \} \{ BC - (BA - AC) \}$   
 Therefore, &c. Q. E. D.

৫। নির্দিষ্ট অথচ অসীম দুই সরল রেখার মধ্যবর্ত্তি এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন এক রেখা নিক্ষেপিত করিতে হইবে যাহা ঐ দুই রেখাতে সমাবদ্ধ অথচ ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৬। এক সমকোণকে ত্রিখণ্ড অর্থাৎ তিন সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

৭। এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে সমান কতিপয় খণ্ডে বিভক্ত করিতে হইবে।

## ২ পরিচ্ছেদ ।

৮। নির্দিষ্ট বৃত্ত পরিধির পৃষ্ঠভাগে সম্প্রতিত যত সরল রেখা দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নিক্ষেপিত হইতে পারে তাহার মধ্যে যে২ রেখা সম্প্রতিত চিত্ত্বত স্পর্শক রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে সেই দুই রেখার যুতি সঙ্গাপেক্ষা নূন হইবে।

৯। এক বৃত্তের ককটোপরি যদি অন্য বৃত্ত নিক্ষেপিত হয় তবে দুই বৃত্তের সম্প্রতিত চিত্ত্ব হইতে বহিস্থ বৃত্ত পরিধি পর্য্যন্ত কোন সরল রেখা অঙ্কিত হইলে সেই রেখা অন্তরস্থ পরিধি দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১০। দুই নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিতে পারে এমন এক সরল রেখা নিক্ষেপিত করিতে হইবে।

১১। কোন বৃত্ত পরিধিস্থ বিন্দু হইতে যদি কএকটি পূর্ণজ্যা নিক্ষেপিত হয় তবে সেই সকল পূর্ণজ্যার দ্বিখণ্ড হওন চিত্ত্ব এক বৃত্ত উৎপন্ন হইবে।

১২। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তরস্থ অথবা বহিস্থ কোন চিত্ত্ব দিয়া এমন এক রেখা নিক্ষেপিত করিতে হইবে যে বৃত্ত দ্বারা ব্যবহৃত তদংশ ব্যাসের অনধিক কোন রেখার তুল্য হয়।



13. If two chords of a given circle intersect each other, the angle of their inclination is equal to half the angle at the centre which stands on an arc equal to the sum or difference of the arcs intercepted between them, according as they meet within or without the circle.

14. In the diameter of a circle produced, to determine a point, from which a tangent drawn to the circumference shall be equal to the diameter.

15. To determine a point in the circumference of a circle, from which lines drawn to two other given points in the circumference, shall have a given ratio.

16. If any point be taken in the diameter of a circle, which is not the centre; of all the chords which can be drawn through that point, that is the least which is at right angles to the diameter.

17. To draw a straight line cutting two concentric circles so that the part of it which is intercepted by the circumference of the greater may be double the part intercepted by the circumference of the less: but the radius of the greater must not be more than twice the radius of the less.

18. If from any two points in the circumference of a circle there be drawn two straight lines to a point in a tangent to that circle; they will make the greatest angle when drawn to the point of contact.

19. If one chord in a circle bisect another, and tangents drawn from the extremities of each be pro-

## ক্ষেত্র বিষয়ক প্রশ্ন ।

বাণ্ড নামক গ্রন্থকারের ক্ষেত্রতত্ত্ব বিষয়ক

প্রশ্ন হইতে সংগৃহীত ।

### ১ পরিচ্ছেদ ।

১। দুই নির্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সমান২ কোণ উৎপন্ন করিতে পারে এমন এক সরল রেখা নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া নিষ্কাশন করিতে হইবে।

২। দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই সমান সরল রেখা এমন প্রকারে নিষ্কাশিত করিতে হইবে যেন কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার এক বিন্দুতে তাহারদের সম্পাত্ত হয়।

৩। এক নির্দিষ্ট রেখার এক পার্শ্বস্থ দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই নির্দিষ্ট রেখা একরূপে নিষ্কাশিত করিতে হইবে যেন তাহারা ঐ রেখাতে সম্পতিত হইয়া তৎসহকারে সমান২ কোণ উৎপন্ন করে।

৪। এক নির্দিষ্ট রেখার এক পার্শ্বস্থ দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ রেখাস্থ এক বিন্দুতে সম্পতিত এমন দুই রেখা নিষ্কাশিত করিতে হইবে কিন্তু তাহারদের যুতি যেন ঐ বিন্দু দ্বয় হইতে ঐ রেখার অন্য কোন বিন্দু পর্য্যন্ত নিষ্কাশিত অন্য কোন দুই রেখার যুতি অপেক্ষা স্থান হয়।

5. From a given point between two indefinite right lines given in position, to draw a line which shall be terminated by the given lines, and bisected in the given point.

6. To trisect a right angle.

7. To divide a given finite straight line into any number of equal parts.

## SECTION II.

8. Of all straight lines which can be drawn from given points to meet on the convex circumference of a circle, the sum of those two will be the least, which make equal angles with the tangent at the point of concurrence.

9. If a circle be described on the radius of another circle; any straight line drawn from the point where they meet, to the outer circumference, is bisected by the interior one.

10. To draw a straight line which shall touch two given circles.

11. If from a point in the circumference of a circle any number of chords be drawn; the locus of their points of bisection will be a circle.

12. Through a given point, either without or within a given circle, to draw a straight line, the part of which intercepted by the circle, shall be equal to a given line not greater than the diameter of the circle.

## APPENDIX.

# PROBLEMS

## SELECTED FROM BLAND'S GEOMETRICAL PROBLEMS.

---

### SECTION I.

1. Through a given point to draw a straight line which shall make equal angles with two straight lines given in position.

2. From two given points to draw two equal straight lines which shall meet in the same point of a line given in position.

3. From two given points on the same side of a line given in position, to draw two lines which shall meet in that line, and make equal angles with it.

4. From two given points on the same side of a line given in position, to draw two lines which shall meet in a point in this line, so that their sum shall be less than the sum of any two lines drawn from the same points and terminated at any other point in the same line.

অধিকন্তু ৪ কঘ.কঙ = (কখ + কগ + খগ) (কখ + কগ + খগ) ৬: ৭

এবং ৪ ঘখ. কঙ = কখগ ত্রিভুজের চতুর্গুণ ক্ষেত্র ফল (৬: ৬)

এবং ৪ খঘ.ঙগ = { খগ + (খক — কগ) } { খগ — (খক — কগ) } (৬: ৬) অতএব

(খক + কগ + খগ) (খক + কগ — খগ) : ৪ ত্রি. কখগ ::

ত্রি. কখগ : { খগ + (খক — কগ) } { খগ — (খক — কগ) }  
অতএব ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এতলে উপপাদ্য।

ষষ্ঠোধ্যায়ঃ সমাপ্তঃ ।





